

<論文>

(受理：昭和62年7月14日)

境界要素法による接着接合物の熱応力解析

西川 哲也*・原 賀 康 介*

要 旨

本研究では、境界要素法による接着接合物の2次元熱応力解析プログラムの開発を行なった。また、このプログラムにより種々の解析を行ない解の妥当性を確かめた。

まず、2次元弾性問題における境界積分方程式に付加される熱応力項の具体的表示式、及び初期応力がある場合の境界上の応力、歪を求めるための連立一次方程式、さらに領域内点の応力を求める式における熱応力項の具体的表示式を示した。

つぎに、このプログラムを用いて、単純平板、金属やプラスチックの複合板、さらに単純重ね合わせ継ぎ手の応力解析を行ない、解の妥当性を確かめた。また、このプログラムを用いて両被着体の線膨張率の値をゼロとおくことにより接着剤の硬化収縮応力の解析も可能であり一例として反射ミラーの接着部の硬化収縮応力の解析を行なった。

1. 緒 言

著者らは、接着接合系の応力解析法として、要素分割の容易さから境界要素法の適用を試み、この応力解析プログラムの開発を行なっている¹⁻³⁾。このプログラムは、2次元弾性解析用であり、要素は高精度な2次要素を用いている。これは、接着接合物の外力に対する応力状態及び、強度を予測するためには有効な手段と考えられる。しかし、接着接合物の中には具体的な外力が加わらなくとも、内部応力や歪により破壊あるいは機能損傷を起こすケースが少なくない。これは例えば、接着剤を加熱硬化した後に室温に冷却した時に接着剤と被着体の線膨張係数の差により熱応力が発生する場合や、温度変化はなくても接着剤が硬化時に収縮し、硬化収縮応力が発生する場合である。

このため、本研究ではこれらの問題に対する従来の弾性解析プログラムの適用拡大のため、熱応力解析機能を付加した。なお、境界要素法では境界積分方程式に付け加える熱応力項を領域積分のまま計算を行なう場合もあるが、この場合はこの積分計算のために領域内部を有限要素法の様にメッシュ(セル)分割する必要がある。これでは、境界のみを要素分割する境界要素法のメリット

は半減してしまうし、特に接着接合物に対しては接着層は被着体に比べて非常に薄いため、接着層領域の分割が困難となる。そのため本研究では熱応力項をさらに境界積分方程式に変換して、すべて境界積分として計算する方法を用い、境界のみの要素分割で熱応力解析を行なうことができる。なお線膨張係数やヤング率は温度により変化しないものとしている。また一般的に熱応力解析とは、熱伝導解析を行ない、その結果得られた温度分布を用いて応力解析を行なうものであるが、ここでは温度分布はなく均一としている。

2. 理 論

2.1 境界積分方程式における熱応力項⁴⁾

本節では、2次元弾性問題に対する境界積分方程式における熱応力項の具体的表示式を示す。境界積分方程式の基本式

$$c \cdot u + \int_{\Gamma} p^* \cdot u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \cdot p d\Gamma + \int_{\Omega} u^* \cdot b d\Omega \quad (1)$$

Γ : 領域境界 u : 変位 u^* : 変位の基本解
 Ω : 領域内部 p : 表面力 p^* : 表面力の基本解
 b : 物体力(熱応力)

において右辺第2項の物体力を考慮すれば、領域積分が必要となる。しかし重力や遠心力、定常熱応力などの場合は Galerkin ベクトルを採用することにより境界積分

* 三菱電機(株)材料研究所

兵庫県尼崎市塚口本町8丁目1-1 〒661

に変換することができ、領域内部のセル分割が不必要になる。

(1)式の物体力項(この場合熱応力)を、

$$B_i = \int_{\Omega} u^* \cdot b_j d\Omega \quad (2)$$

と表すと、 B_i は次式のように境界積分に変換できる。

$$B_i = \int_r P_i \cdot T d\Gamma - \int_r Q_i \cdot T_{,k} n_k d\Gamma \quad (3)$$

ここで2次元平面歪問題では

$$P_i = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[\left(l_n \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) n_i - r_{,i} r_{,k} n_k \right] \quad (4)$$

$$Q_i = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} r r_{,i} \left(l_n \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

r : ソース点と場の点との距離

$r_{,i}$: ソース点と場の点との i 方向距離

α : 線膨張係数

ν : ポアソン比

である。

左辺第2項は T , k を含み、

$$T_{,k} = \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (6)$$

であるから、領域内に温度分布がなく一定温度変化を取り扱う場合には無視できる。従って、以下では右辺第2項を省略し、

$$B_i = \int_r P_i \cdot T d\Gamma \quad (7)$$

として進める。

(4)式と(7)式より熱応力項 $B_i (i=1, 2; k=1, 2)$ は k に関する Einstein の総和規約に注意すると次式のように表される。

$$B_1 = \int_r P_1 \cdot T d\Gamma = \int_r \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[\left(l_n \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) l \right. \\ \left. - \frac{x-x_i}{r} \left[\frac{x-x_i}{r} l + \frac{y-y_i}{r} m \right] \right] T d\Gamma \quad (8)$$

$$B_2 = \int_r P_2 \cdot T d\Gamma \\ = \int_r \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[\left(l_n \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) m \right. \\ \left. - \frac{y-y_i}{r} \left[\frac{x-x_i}{r} m + \frac{y-y_i}{r} l \right] \right] T d\Gamma \quad (9)$$

ここで $l = n_1$, $m = n_2$

(x, y) : 場の点

(x_i, y_i) : ソース点

これらの積分計算は、Legendre-Gauss の数値積分公式を用いる一般の場合には、

$$B_i = \int_r P_i \cdot T d\Gamma \\ = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^m |G|_i w_i (P_i[N]^j) \right] T \quad (10)$$

N : 要素数 $|G|$: Jacobian

m : 積分点数 $[N]$: 内挿関数

w : 重み

であり、また要素と要素が近接している接着層領域などは、次式のように二重指数型積分公式⁵⁾を用いなければいけない。

$$B_i = \int_r P_i \cdot T d\Gamma \\ = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi h}{2} \sum_{n=-\frac{25}{4h}}^{\frac{25}{4h}} |G|_i (P_i[N]^n) \frac{\cosh nh}{\cosh^2(\sinh nh)} \right] T \quad (11)$$

なお、Legendre-Gauss の数値積分公式における積分点数及び、二重指数型積分公式におけるきざみ幅と解析精度については前報³⁾の通りである。以上のように(1)式の右辺第2項に B_i を付加することにより、熱応力問題における境界上の変位、表面力を決定することができる。なお以上の式は、2次元平面歪に対するものであり平面応力の場合は、

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1+\nu} = \alpha \frac{1+\nu}{1+2\nu} \quad (12)$$

とポアソン比と線膨張係数を置き換えることにより同一の式で計算できる。

2.2 熱弾性問題における境界上の応力、歪

2.1により熱応力問題における境界上の変位、表面力を全て決定することができたため、本節ではこれらの値から境界上の応力、歪を求める式を示す。境界上の応力は、次式より計算できる。

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \delta_{ij} \sigma_0 \quad (13)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (14)$$

$$\frac{du_i}{ds_i} = u_{i,x_j} \frac{dx_j}{ds_i} \quad (15)$$

ここで(13)式右辺第3項が熱応力項であり、

$$\sigma_0 = -2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T \quad (16)$$

である。従って2次元の場合は、これらを以下に示す7元連立一次方程式として解けばよい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & B \\ 0 & m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & B & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -G & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \epsilon_{xx} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ T_y \\ T_x \\ C \\ 0 \\ \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで、

$$A = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}G, \quad B = -\frac{2\nu}{1-2\nu}G, \quad (18)$$

$$C = -2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T$$

G : 横弾性係数 T_x, T_y : 表面力
 δ_x, δ_y : 変位の微分 l, m : 方向余弦

である。

2.3 熱応力問題における領域内点の応力

本節では、熱応力問題における領域内点の応力の具体的表示式を示す。熱応力問題における領域内点の応力 σ_{ij} は熱応力項 B'_{ij} を加えて以下の式で求められる。

$$\sigma_{ij} = \int_r u^*_{ijk} \cdot P_k d\Gamma - \int_r p^*_{ijk} \cdot u_k d\Gamma + B'_{ij} \quad (19)$$

u^*_{ijk} : 変位の基本解の微分
 p^*_{ijk} : 表面力の基本解の微分
 B'_{ij} : 熱応力項

ここで

$$B'_{ij} = \int_r S_{ij} T d\Gamma - \int_r V_{ij} T_k n_k - 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T_{ij} \quad (20)$$

$$S_{ij} = \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} \left\{ n_m r_m \left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2\tau_i \tau_j \right) + n_i \tau_j + \tau_j n_i \right\} \quad (21)$$

$$V_{ij} = \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} \left\{ \tau_i \tau_j - \left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \right) \right\} \quad (22)$$

n_i : i 方向余弦
 r : ソース点と場の点との距離
 τ_i : ソース点と場の点との i 方向距離
 T : 温度変化
 α : 線膨張係数
 $(\cdot)_i$: i 方向微分
 δ_{ij} : クロネッカーの δ

ここで(20)式は境界積分方程式(3)と同様に、右辺第2項は T_k を含んでいるため省略し、

$$B'_{ij} = \int_r S_{ij} \cdot T d\Gamma$$

として進める。

(23)と(21)式より熱応力項 $B'_{ij}(i, j = 1, 2; m = 1, 2)$ は m に関する Einstein の総和規約に注意すると次式のように表される。

$$B'_{11} = \int_r \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{(x-x_i)l + (y-y_i)m}{r} \left(\frac{1}{1-2\nu} - \frac{2(x-x_i)^2}{r^2} \right) + \frac{2(x-x_i)}{r} l \right\} T d\Gamma - 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \quad (24)$$

$$B'_{22} = \int_r \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{(x-x_i)l + (y-y_i)m}{r} \left(\frac{1}{1-2\nu} - \frac{2(y-y_i)^2}{r^2} \right) + \frac{2(y-y_i)}{r} m \right\} T d\Gamma - 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \quad (25)$$

$$B'_{12} = B'_{21} = \int_r \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} \left\{ -\frac{(x-x_i)l + (y-y_i)m}{r} + \frac{2(x-x_i)(y-y_i)}{r^2} + \frac{(y-y_i)l}{r} + \frac{(x-x_i)m}{r} \right\} T d\Gamma \quad (26)$$

ここで $l = n_1, m = n_2$
 (x, y) : 場の点, (x_i, y_i) : ソース点

これらの積分計算は、Legendre-Gauss の数値積分を行う一般の場合には、

$$B'_{ij} = \int_r S_{ij} T d\Gamma = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^m |G|_i w_j (S_{ij} [N]^T)_i \right] T \quad (27)$$

N : 要素数 $|G|$: Jacobian
 m : 積分点数 $[N]$: 内挿関数
 w : 重み

であり、また内点が要素と近接している場合は、(11)式のように二重指数型積分公式⁵⁾を用いなければいけない。

以上のように(25)式の右辺第3項に B'_{ij} を付加することにより、熱応力問題における領域内点の応力を決定することができる。なお以上の式は、2次元平面歪に対するものであり平面応力の場合は、(12)式と同様の変換を行えば良い。

なお、領域内点の変位は、次式に全ての境界上の変位、表面力を代入することにより、求めることができる。

$$u_i = \int_r u^*_{ij} \cdot p_j d\Gamma - \int_r p^*_{ij} \cdot$$

$$\cdot u_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i}^* \cdot b_j d\Omega \quad (28)$$

- u_i : 領域内点の変位 $u_{,i}^*$: 変位の基本解
- u_j : 境界上の変位 $p_{,i}^*$: 表面力の基本解
- p_j : 境界上の表面力 b_j : 物体力 (熱応力)

ここで、(28)式右辺第3項の熱応力項は、(1)式の右辺第2項と同じものであり、2.1で述べた方法で計算すれば良い。

3. 解析例

本章では、2章の理論に従い開発したプログラムによる種々の解析例を紹介する。

3.1 単純平板の両端拘束問題

まず最初に単純平板の解析例を示す。これは単純平板の両端を拘束して温度を上昇させた時に発生する圧縮応力を求めるものである。解析モデルの形状、要素分割、拘束条件を Fig. 1 に、材料定数を Table. 1 に示す。要素分割数は、それぞれの領域で8個ずつ計24要素、総節点数は、60節点であり、領域Aには領域内点1~7をとっている。また温度上昇 T は100℃とした。解析結果を Fig. 2, 3 に示す。Fig. 2 は境界上の節点14~18番に相当する σ_{yy} 、Fig. 3 は、領域内点1~7番に相当する σ_{yy} である。また、図において○は本プログラムによる数値

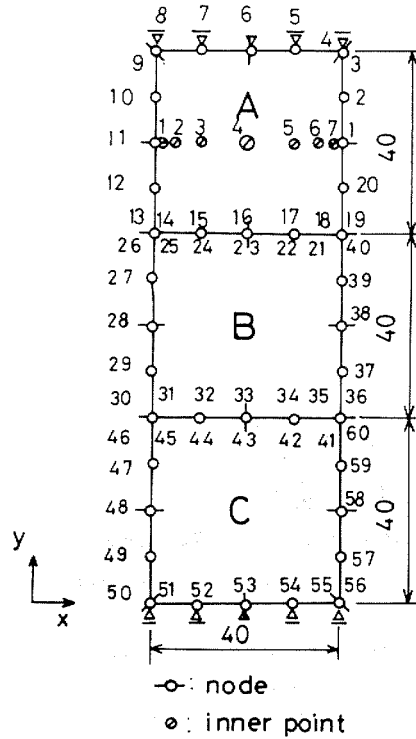


Fig. 1. Boundary condition and boundary element configuration

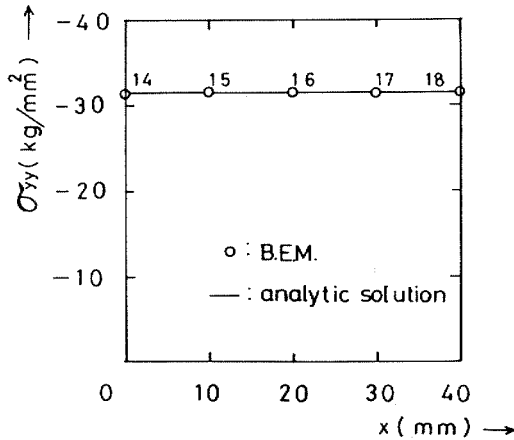


Fig. 2. Thermal stress distribution along the boundary elements

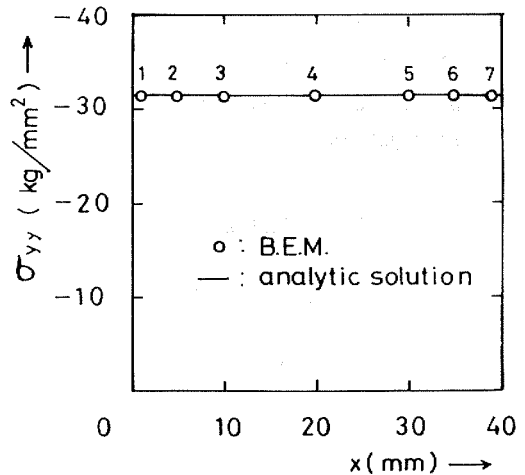


Fig. 3. Thermal stress distribution in the inner points

Table 1. Mechanical Properties

	Young's Modulus (kg/mm ²)	Poisson's Ratio	Coefficient of Linear Expansion(1/K)
Region A (Steel)	21000.0	0.3	1.5×10 ⁻⁵
Region B (Steel)	21000.0	0.3	1.5×10 ⁻⁵
Region C (Steel)	21000.0	0.3	1.5×10 ⁻⁵

解、——は解析解である。なお解析解は、

$$\sigma = \epsilon E = -\alpha T E \tag{29}$$

α : 線膨張係数 T : 温度変化 E : ヤング率

により求めたものである。また変形図をFig. 4に示す。図において実線は変形前、点線は変形後の形状を示している。Fig.2,3より境界上及び、領域内点の応力共に非常に精度の良い解が得られていることがわかる。

3.2 金属—プラスチック複合板の両端拘束問題

次に3.1と同じ形状で中央のBの材料がプラスチックの場合を行った。解析モデルの形状、要素分割、拘束条件はFig. 1と同じであるが、領域内点は領域Bの中央部にとった。材料定数をTable. 2に示す。プラスチック領域内点の応力をFig. 5に、また変形図をFig. 6に示す。図より、鉄よりも線膨張係数の大きなプラスチックが大きく膨張し、しかもヤング率が小さいため縦方向には縮められているようすがわかる。なおこの場合、解析解は得られないため示さない。

3.3 鉄と銅の複合板の熱膨張

次に、鉄—銅—鉄の複合板の応力解析を行った。解析モデル形状、要素分割、拘束条件をFig. 7に、材料定数をTable. 3に示す。また、温度変化は100℃とした、解析結果をFig. 8に示す。Fig. 8は銅に生じる熱応力であり、 Δ は銅上面、 \circ は内部、 ∇ は下面の値である。また——は解析解である。解析解は以下の公式

$$\sigma_1 = - \frac{E_1 E_2 A_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{E_1 A_1 + E_2 A_2} T \tag{30}$$

E_1 : 材料1のヤング率 A_1 : 材料1の面積
 E_2 : 材料2のヤング率 A_2 : 材料2の面積
 α_1 : 材料1の線膨張係数 T : 温度変化
 α_2 : 材料2の線膨張係数

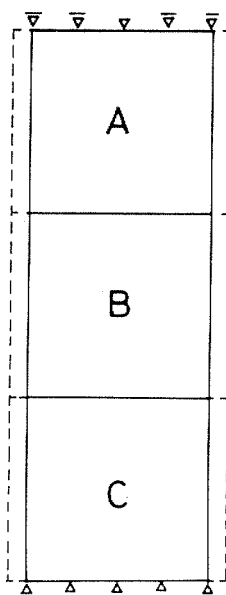


Fig. 4. Deformation of the model

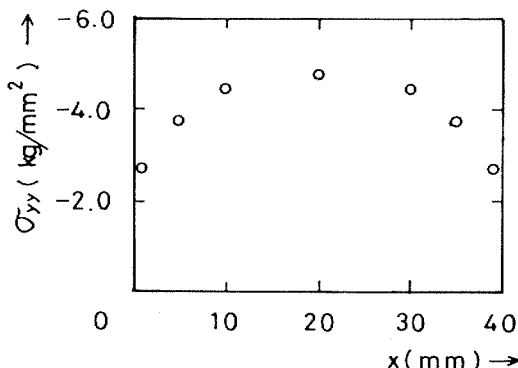


Fig. 5. Thermal stress distribution in the plastics region

Table 2. Mechanical Properties

	Young's Modulus (kg/mm ²)	Poisson's Ratio	Coefficient of Linear Expansion(1/K)
Region A (Steel)	21000.0	0.3	1.5×10 ⁻⁵
Region B (Plastics)	300.0	0.35	1.0×10 ⁻⁴
Region C (Steel)	21000.0	0.3	1.5×10 ⁻⁵

Table 3. Mechanical Properties

	Young's Modulus (kg/mm ²)	Poisson's Ratio	Coefficient of Linear Expansion(1/K)
Region A (Steel)	21000.0	0.3	1.07×10 ⁻⁵
Region B (Copper)	12500.0	0.34	1.65×10 ⁻⁵
Region C (Steel)	21000.0	0.3	1.07×10 ⁻⁵

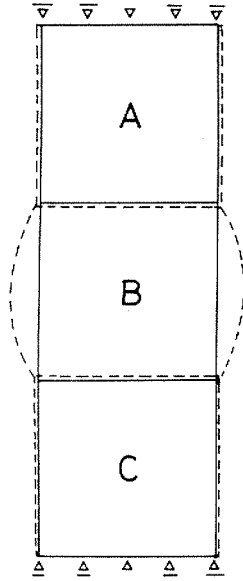


Fig. 6. Deformation of the model

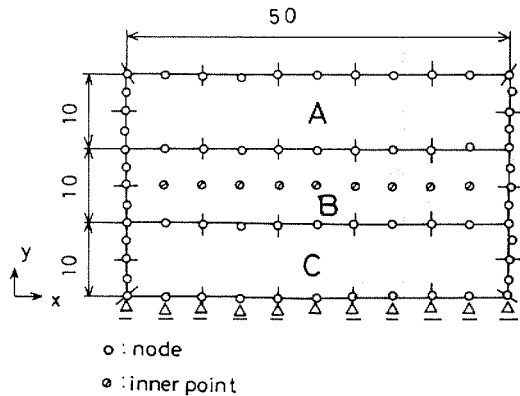


Fig. 7. Boundary condition and boundary element configuration

により求めた値である。③式は左右端部の変位が一樣であるというときの公式であるため数値解と端部の条件が異なっている。Fig. 8より銅の中央部の応力値は解析解とほぼ同じ値になっている。また変形図をFig. 9に示す。

3.4 接着継手

次に、接着継手の応力解析結果を示す。解析モデル形状、要素分割、拘束条件をFig. 10に、材料定数をTable. 4に示す。また、温度変化は -100°C とした。解析結果をFig. 11に示す。Fig. 11において○は接着層の上面に生じる熱応力であり、—は解析解である。解析解は、③式により求めた値である。この場合も解析解の端部での条件が実際のモデルと異なっているため、端部付近の数値解の評価はできないが、接着層中央部ではほぼ解析

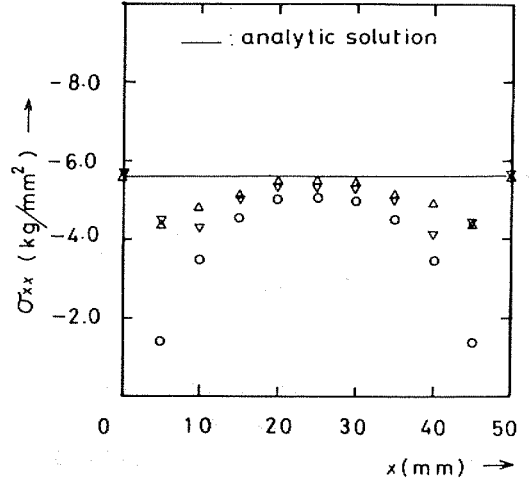


Fig. 8. Thermal stress distributions (Δ : the upper side of copper, \circ : the inner part of copper, ∇ : the down side of copper)

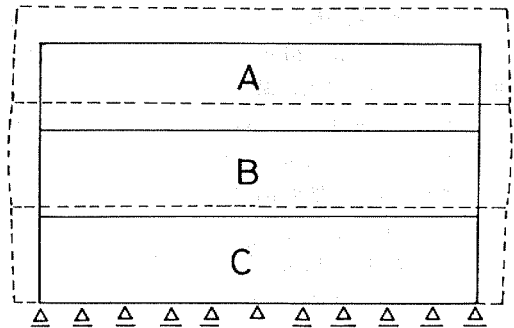


Fig. 9. Deformation of the model

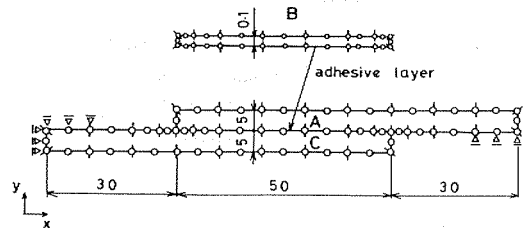


Fig. 10. Boundary condition and boundary element configuration

解と同じ値となっている。

3.5 反射ミラー接着部の硬化収縮応力解析

最後に接着剤の硬化収縮応力の解析例を示す。解析モデル形状は、Fig. 12に示す反射ミラーである。また材料定数をTable. 5に示す。この場合はガラスとアルミの両被着体の線膨張係数をゼロとして接着剤の硬化収縮

Table 4. Mechanical Properties

	Young's Modulus (kg/mm ²)	Poisson's Ratio	Coefficient of Linear Expansion(1/K)
Region A (Steel)	21000.0	0.3	1.07×10 ⁻⁵
Region B (Adhesive)	300.0	0.35	1.00×10 ⁻⁴
Region C (Steel)	21000.0	0.3	1.07×10 ⁻⁵

Table 5. Mechanical Properties

	Young's Modulus(kg/mm ²)	Poisson's Ratio
Region(Glass) A	7000.0	0.24
Region(Adhesive) B	400.0	0.35
Region(Aluminum) C	7400.0	0.34

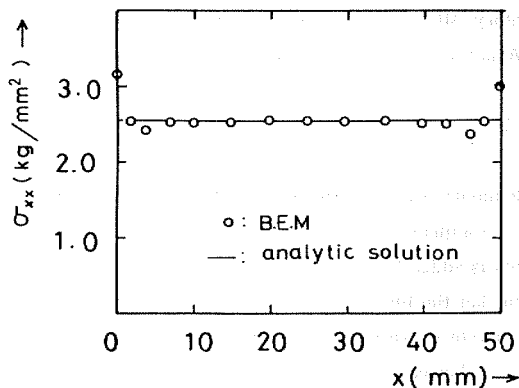


Fig. 11. Thermal stress distribution in the upper side of adhesive layer

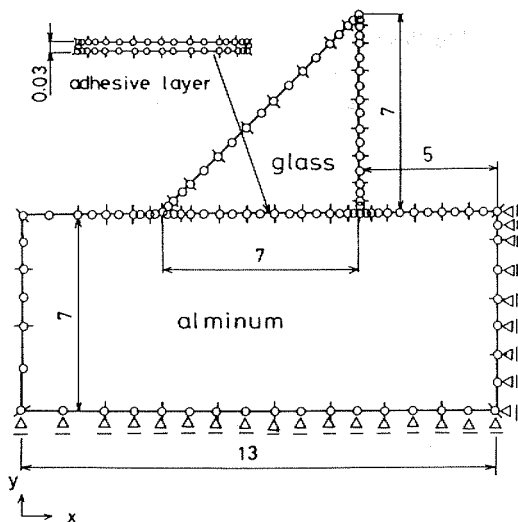


Fig. 12. Boundary condition and boundary element configuration

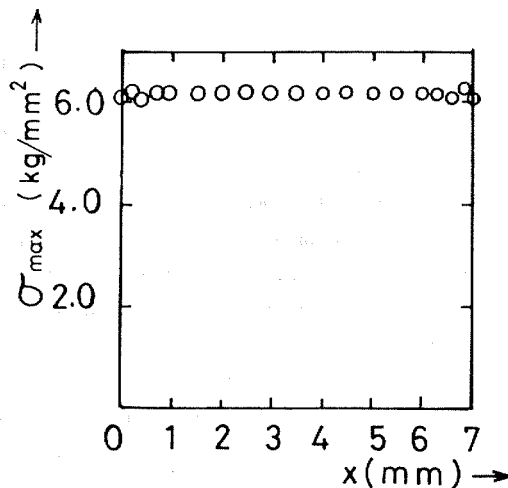


Fig. 13. Curing stress distribution in the upper side of adhesive layer

率，即ち計算上は線膨張係数×温度変化を1%として行なった。解析結果をFig. 13に示す。図より接着層には、ほぼ一様な応力が働いていることがわかる。

4. 結 言

本研究では熱応力解析プログラムの開発を行なった。境界要素法において熱弾性問題では、熱応力項を領域積分のまま計算を行なう場合が多く、この場合はこの積分計算のために領域内部を有限要素法の様にメッシュ(セル)分割する必要がある。そのため本プログラムでは、メッシュ分割を避けるため熱応力項をさらに境界積分方程式に変換して、すべて境界積分として計算する方法を用いている。なお線膨張係数やヤング率は温度により変

化しないものとしている。このプログラムを用いて単純平板、金属やプラスチックの複合板、さらに単純重ね合わせ継手の応力解析を行ない、解の妥当性を確かめた。本研究は昭和62年7月2日第25回接着研究発表会において講演発表したものである。

参 考 文 献

- 1) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 21, (4) 136 (1985).
- 2) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 22, (5) 244 (1986).
- 3) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 22, (8) 409 (1986).
- 4) C. A. Brebbia, 田中正隆訳「境界要素解析—理論と応用」丸善 221~228 (1984).
- 5) 三好俊郎, 有限/境界要素解析プログラミング, サイエンス社, (1985).

Thermo-Elastic Analysis of Adhesive Bonded Joints by Boundary Element Method

Tetsuya NISHIKAWA and Kousuke HARAGA

Materials and Electronic Devices Laboratory, MITSUBISHI Electric Corp.
1-1, Tsukaguchi-Honmachi 8-chome, Amagasaki, Hyogo, 661 JAPAN

Abstract

Two-dimensional thermo-elastic analysis program by Boundary Element Method has been prepared. This program is for the analysis of adhesive bonded joints and using a quadratic element.

First, the concrete expressions of thermo-elastic term which is added to the Boundary Integral Equation as for two-dimensional elastic problem are showed. And it is given that the linear equation about the stress-strain on the boundary, in case of initial-stress problem. And the concrete expressions of thermo-elastic term which is added to the expression about the stress of the inner points are showed.

Secondary, thermo-elastic problem about simple steel plate, compound plate of steel-plastics-steel and steel-copper-steel, and single lap adhesive bonded joint are analyzed. According to these results the validity and effectiveness of this program are proved.

Finally, the problem of the curing stress of adhesive is analyzed by this program.

(Received : July 14, 1987)