

## 〈論文〉

(受理：昭和61年4月23日)

2次要素を用いた境界要素法による  
接着接合物の応力解析

西川 哲也\*，原賀 康介\*

## 要 旨

著者らは、これまでに一定要素を用いた境界要素法による接着接合物の応力解析プログラムを開発してきたが、複雑な形状を持つ接着接合物では、精度が不十分で解析が行えないことがあった。そこで解析精度を向上させるため、今回2次要素の導入を検討し、特に2次要素を導入する場合に問題となる、数値積分の積点数と精度及び、連立一次方程式の解の精度について検討した。これらの点について、具体的な解析モデルを用いて計算実験を行ない、次の点が明らかとなった。

(1) 数値積分の積点数は、Legendre-Gaussの数値積分において、節点と要素との距離 $r$ と要素の長さ $l$ との比 $r/l$ が、1.0以上のとき6点積分、0.4以上のとき12点積分とするのが計算の精度及び時間の点で効率が良い。また $r/l$ が0.4未満のときは二重指数型積分を行なうのが良く、 $r/l$ が0.01のとき、分割幅 $h$ は0.01では十分な精度が得られた。

(2) 最終的に解くべき連立一次方程式は、Gaussの消去法よりも共役勾配法が精度的に良く、またこのとき事前にスケールングを行なうことにより、収束までの繰り返し回数が20~60%減少する。なお収束判定係数は $10^{-5}$ 程度が適切である。

(3) これにより、従来解析が困難であった複雑な形状を持つ接合物の応力解析が、精度良く行なえるようになった。

## 1. 諸 言

接着接合を各種の部品組立てに積極的に取り入れていくためには、接合部の応力解析により、その強度上の定量的な保障が得られることが必要である。また応力解析は、最適な接着部形状を得るための有力な手段であり、接着部品の破壊に対して、その原因を究明するためにも、有効である。

ところが、接着接合部の応力解析を一般的な数値解析手法である有限要素法によって行なうと、接着層の厚さが被着体厚さに比べて非常に薄いため、接合物全体の要素分割数は、単純な形状のものでも非常に多くなってしまふ。従って、計算時間や労力が一般的な構造解析のうちでも中規模以上のものとなり、数多く存在する接着接合の個々に対して応力解析を行なうのは、現実的には困難であった。

そこで、著者らは、要素分割数の低下という点から境

界要素法の適用を試み、応力解析プログラムを作成し、その接着系に対する有用性を解析解との対応<sup>1)</sup>や、継手の破壊強度試験との対応<sup>2)</sup>により検討してきた。ところが従来のプログラムでは、単純重ね合わせ継手や二重重ね合わせ継手等の簡単な形状の継手に対しては、精度の良い解が得られる反面、複雑な形状の継手に対しては同程度の要素分割では、解の精度が著しく悪化するという問題があった。これを精度良く解析するには予想以上に細かな要素分割が必要と思われるが、そのためにはより多くのメモリーが必要となり計算機によっては解析が不可能となってしまう。

そのため、要素数を増加させないで解析精度の向上を図るため、従来用いていた一定要素(0次要素)から、より高精度な要素である2次要素を用いることを検討した。境界要素法は、物体の境界のみを要素分割し、境界上の未知数(変位、表面力)に関する連立一次方程式を構成し解くものであるが、数値計算上解析精度を低下させる原因として、この連立一次方程式の成分の計算時の誤差、及び連立一次方程式の解法時の誤差の2つに分けて考え

\*三菱電機(株)材料研究所

兵庫県尼崎市塚口本町 8-1-1 〒661

ることができる。

そこで本報では、連立一次方程式の成分の積分計算の精度及び、連立一次方程式の解の精度について、これらの計算の効率化を含め、具体的なモデルを用いて計算実験を行なって検討した結果を報告する。また、今回開発した2次要素のプログラムによる種々の具体的な解析例を、一定要素による解析例と比較して紹介する。

2. 数値積分の精度向上

従来の一要素の場合、連立一次方程式の成分の計算は、解析的な積分を行っていたが、2次要素の場合は数値積分によるため、一般的に精度の良い Legendre-Gauss の数値積分でも、特に接着層領域のような薄い領域では、解の精度は著しく低下する。これは、領域内点が要素近傍にあるときに数値積分精度が低下することと同じ原因と考えられる。これに対する精度の向上法としては、積分を解析的に行なう<sup>3)</sup>とか、高次要素を用いる<sup>4)</sup>とか、二重指数型積分を用いる<sup>5)</sup>方法が提案されている。ただし、二重指数型積分を用いると、計算時間が大幅に増加する。

今回開発したプログラムでは、接着層領域のような近接要素間の積分には、二重指数型積分を導入して解析精度の向上を図り、また計算時間の効率化という面から、この計算を必要最小限におさえることを検討した。

なおここでは、数値積分(連立一次方程式の成分)の精度は、連立一次方程式を解いて得られる表面力の値により判定するため、連立一次方程式の解法部を倍精度(Gauss の消去法)にすることにより、連立一次方程式の解法時の誤差を極力減らした。

2.1 Legendre-Gauss の数値積分公式

2次要素を用いた場合、連立一次方程式の成分の計算は、普通次式で示す Legendre-Gauss の数値積分公式を用いて行なわれる。

$$\int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^m w_i \cdot F(\eta_i) \quad (1)$$

ここで、 $w_i$  は重みの値、 $\eta_i$  は座標値、 $m$  は積分点の個数であり多いほど精度が高い。この積分公式は、 $n$  次関数を  $n-1$  次関数で近似したことに相当し、少ない積分点で精度の良い値が得られる。(1)式は一般的な問題においては、節点と要素との距離  $r$  と要素の長さ  $l$  との比に対し、

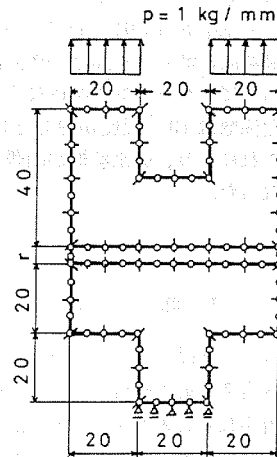
- $r/l \geq 15$  のとき  $m=2$
- $15 > r/l \geq 5$  のとき  $m=4$
- $5 > r/l$  のとき  $m=6$

とするのが最も効率的<sup>6)</sup>であるが、接着層領域のように要素と要素の間隔が要素長に比べて極端に短い場合(例

えば、厚さ 0.1 mm の接着層領域に長さ 10 mm の要素を用いると、 $r/l=0.01$  となる)には精度が著しく低下すると言われている。これは、積分の計算式である基本解の形が、 $1/r$  や  $\log(1/r)$  を含み  $r$  が 0 に近づくと非常に大きな値となるためである。そこで、 $r/l$  が非常に小さいとき(1)式の積分点の個数は、どの程度必要かを調べ、また(1)式の適用限界を決めた。

計算に用いた解析モデルは、Fig. 1 に示す形状であり、それぞれ接着層の厚さを変化させている。つまり、接着層厚さと要素長の比  $r/l$  で 1.0, 0.4, 0.2, 0.1, 0.01 の 5通りとした。解析条件は、境界条件として底面を固定、上面に  $p=1.0 \text{ kg/mm}$  を与えた。また材料定数を Table 1 に示す。要素分割数は、図に示すように凹型ブロックが 24 個、接着層が 14 個、凸型ブロックが 20 個、合計 58 個であり、5 種類とも同じ分割である。解析はすべて平面歪として行なった。

ここでまず、積分点数を 6 点として解析した結果を Fig. 2 に示す。Fig. 2 は、上の凹型ブロックの底面に生ずる表面力を図示したものである。図より、凹型ブロッ



$r$	10	4	2	1	0.1
$r/l$	1.0	0.4	0.2	0.1	0.01

Fig. 1 Shape, dimensions and element configuration of the model.

Table 1 Mechanical properties of the joint

	Young's modulus (kg/mm <sup>2</sup> )	Poisson's ratio (-)
Upper adherend	21000.0	0.30
Adhesive	300.0	0.35
Lower adherend	21000.0	0.30

クの底面の表面力は  $r/l$  が小さくなるにつれ著しく振動し、 $r/l \leq 0.2$  では解は明らかに誤りであることがわかる。なお、凸型ブロックの底面の節点反力等は正解であった。

$r/l \geq 0.4$  までは6点積分で精度が保障されたので、つぎに、 $r/l < 0.4$  について積分点数を12点として計算した。その結果を Fig. 3 に示す。図より、6点積分よりは明らかに解の精度は改善され、 $r/l = 0.2$  では正解と思われる。

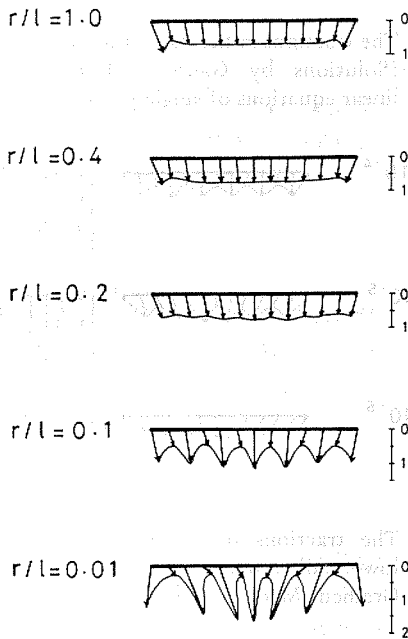


Fig. 2 The tractions in the base of upper adherend. (Solutions by Legendre-Gauss Formula of numerical integration. 6-degrees)

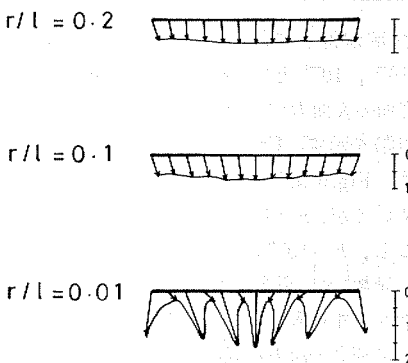


Fig. 3 The tractions in the base of upper adherend. (Solutions by Legendre-Gauss Formula of numerical integration. 12-degrees)

以上の結果より安全性も考慮して、 $r/l$  に対する最適な積分点数は、

$$5.0 > r/l \geq 1.0 \text{ のとき } 6 \text{ 点積分}$$

$$1.0 > r/l \geq 0.4 \text{ のとき } 12 \text{ 点積分}$$

と考えられる。そして、 $r/l$  の値が 0.4 よりも小さくなった場合に二重指数型積分を用いることとする。

### 2.2 二重指数型積分

ここでは、二重指数型積分を用いるに際して、分割幅をいくつに設定すればよいかについての検討を行なった。二重指数型積分は、端点に特異性を持つ積分に対しても、台形則を用いて十分な精度を与える変数変換型の公式であり、簡単に示すと<sup>6)</sup>、

次式に示すような積分

$$\int_{-1}^1 F(\eta) d\eta \quad (2)$$

において変数  $\eta$  を次のような二重指数型の関数に変数変換する。

$$\eta = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \quad (3)$$

ここで、

$$d\eta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{dt}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} \quad (4)$$

となり、式を見やすくするために

$$G(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} \quad (5)$$

と、おいてから(2)式に代入すると

$$\int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)\right) \frac{\pi}{2} G(t) dt \quad (6)$$

積分区間は、

$$\eta \quad -1 \rightarrow +1$$

$$t \quad -\infty \rightarrow +\infty$$

となる。ここで積分区間が  $\infty$  になっても、次式のように  $G(t)$  の値は、

$$G(\pm 2.5) = 1.36 \times 10^{-7} \quad (7)$$

と非常に収束性が良いため、積分区間を

$$-2.5 \leq t \leq 2.5 \quad (8)$$

としても精度的に問題はない。

(6) 式の積分を、台形則を用いて行なえば、分割幅を  $h$ 、分割数を  $n$ 、積分区間を(8)式として

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta &= \frac{\pi h}{2} \sum_{n=-\frac{2.5}{h}}^{\frac{2.5}{h}} F\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(nh)\right)\right) G(nh) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。(9)式が二重指数型積分であり、一つの積分値を求めるための計算回数は、分割幅  $h$  により  $5.0/h$  ( $h =$

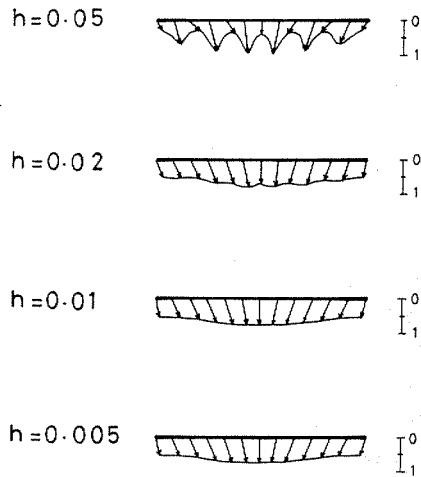


Fig. 4 The tractions in the base of upper adherend. (Solutions by Double Exponential Formula of numerical integration.)

0.01なら500回)となる。これは Legendre-Gauss の数値積分に比べて非常に多く、計算時間の面から必要以上に設定しないことが大切である。

そこで Fig.1 の  $r/l=0.01$  の凹凸ブロックの接着構造物について  $h=0.05, 0.02, 0.01, 0.005$  の4種類の  $h$  に対して解析を行なった。

解析結果を Fig. 4 に示す。図から  $h=0.05$  では解は振動し、 $h=0.02$  でも不十分である。また  $h=0.01$  では解はなめらかとなり  $h=0.005$  の解とほぼ等しくなっていることから、 $h=0.01$  で正解と思われる。

### 3. 連立一次方程式の計算精度の向上

2. により数値積分の値(連立一次方程式の成分の値)は、十分な精度で得られた。そこで、次にこの連立一次方程式をいかに正確に解くかが問題となる。2. ではこの連立一次方程式の解法時の誤差を極力減らすため、倍精度の Gauss の消去法で行なっていたが、これを単精度で解くと Fig. 5 に示す様に解の精度は著しく悪化する。

プログラムの容量や計算時間を考えるとできるだけ単精度で計算の方が効率が良いため、ここでは連立一次方程式の解の精度、及び計算の効率化について検討した。

連立一次方程式の解の精度向上については、一定要素の場合、共役勾配法を用いると良い結果が得られたため<sup>1)</sup>、2次要素の場合にも、共役勾配法を用いることとした。

#### 3.1 収束判定係数について(スケーリングなし)

収束判定係数  $F$  は、一定要素の場合  $F=10^{-4}$  程度では

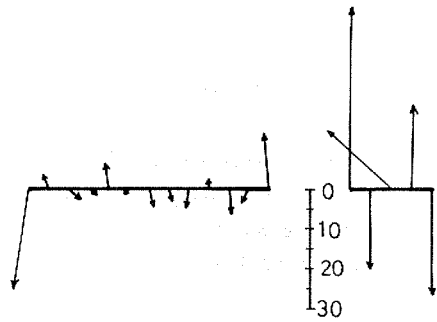


Fig. 5 The tractions in the base of upper adherend. (Solutions by Gaussian Elimination of linear equations of single precision)

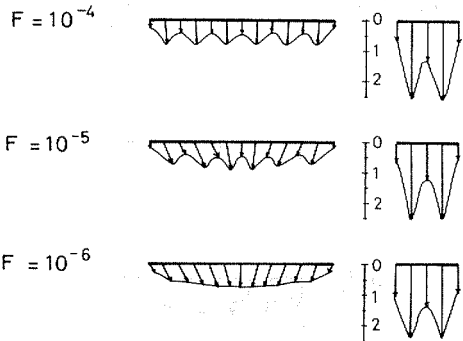


Fig. 6 The tractions in the base of upper and lower adherend. (Solutions by Conjugate Gradient Method of linear equations.)

Table 2 Repetition number till convergence at each  $F$

$F$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Number	342	498	> 1160

ば妥当な解が得られたため、2次要素において、 $F=10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  として解析した。Fig. 6 に凹型ブロックの底面の表面力(左図)、および凸型ブロックの節点反力(右図)を示す。また収束までの繰り返し数を Table 2 に示す。Fig.6 より  $F$  の値を小さくするにつれ正解に近づいているが、 $F=10^{-6}$  でも節点反力の値が不正解である。なお、 $F=10^{-6}$  のときは繰り返し数が(連立一次方程式の元数) $\times 5$  以内でも収束しなかった。この繰り返し回数が多いと計算時間の面で不利となるため、次に連立一次方程式の解法に入る以前のスケーリングについて検討を行なった。

#### 3.2 スケーリングについて

スケーリングの操作は、一般的に連立一次方程式の反

復解法において、その収束までの繰り返し数を減少させる効果がある。スケーリングとは、連立一次方程式

$$[A][X] = [B] \quad (10)$$

の係数行列[A]の成分間のオーダーを合わせる操作であり、具体的手順は以下の通りである。

まず、

$$c_i = \sqrt{\sum_{j=1}^N a_{ij}^2} \quad (11)$$

N:元数,  $a_{ij}$ : [A]の成分

を求め、

$$d_{ij} = a_{ij} / c_i \quad (12)$$

$$e_i = b_i / c_i$$

を計算する。この操作により、[A]の列に関する成分のばらつきをおさえることができる。さらに、

$$g_j = \sqrt{\sum_{i=1}^N d_{ij}^2} \quad (13)$$

を求め、

$$f_{ij} = d_{ij} / g_j \quad (14)$$

を計算する。この操作により、[A]の行に関する成分のばらつきをおさえることができる。

この結果得られた連立一次方程式

$$[F][y] = [E] \quad (15)$$

の解[y]を求め

$$x_i = y_i / g_i \quad (16)$$

とすることにより(10)式の[X]を得る。

境界要素法における連立一次方程式の係数行列は、各列間に材料のヤング率のオーダーの差異があり、また接着接合物のような非均質な材料を扱う場合には、各行間にそれぞれの材料のヤング率の比のオーダーの差異がある。そのため、プログラムでは行と列の両方向のスケーリングを行なった。

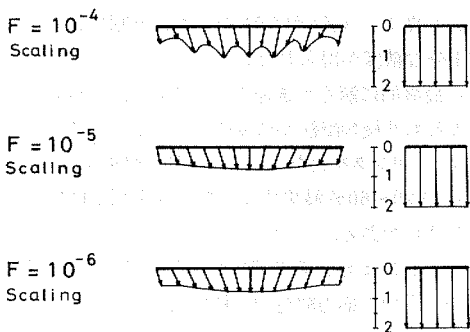


Fig. 7 The tractions in the base of upper and lower adherend. (Solutions by Conjugate Gradient Method with Scaling of linear equations.)

Table 3 Repetition number till convergence at each F with scaling

F	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-6</sup>
Number	271	368	509

計算は、収束判定係数Fの値を3.1と同様 F=10<sup>-4</sup>, 10<sup>-5</sup>, 10<sup>-6</sup>として行なった。結果をFig.7に示す。また、収束までの繰り返し数をTable3に示す。図よりF=10<sup>-4</sup>で節点反力の値が正解となり、F=10<sup>-5</sup>で凹型ブロックの表面力の値も正解となった。この結果Fの値はF=10<sup>-5</sup>程度が適当と思われる。

また、Table2, Table3からスケーリングを行なうことにより、それぞれのFの値に対して、収束までの繰り返し回数が20~60%減少したことがわかる。

#### 4. 解析例

ここでは、3つの解析モデルを用いて、2次要素による解と一定要素による解を比較して示す。解析を行なった形状は、Fig.8, 9, 10に示すもので、被着体は鋼、接着剤はエポキシ系を仮定している。また接着層の厚さは、全て0.1mmとした。解析に際して、図に示すように2次要素の要素分割数は、一定要素の場合と節点数が等しくなるように、一定要素の要素分割数の半分にしている。また解析結果のグラフは、それぞれのせん断応力分布を示しており、○は一定要素による解、●は2次要素による解を示している。

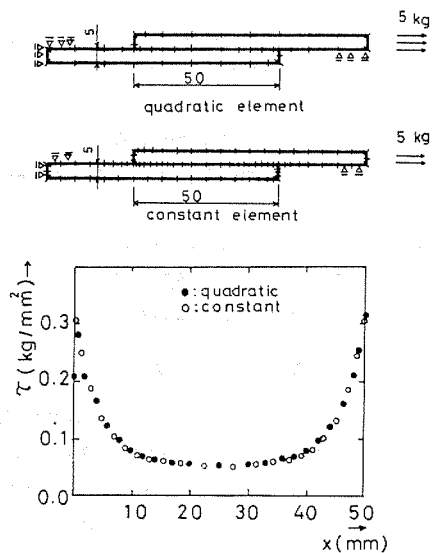


Fig. 8 Element configurations and shear stress distributions by each element. (Single lap joint)

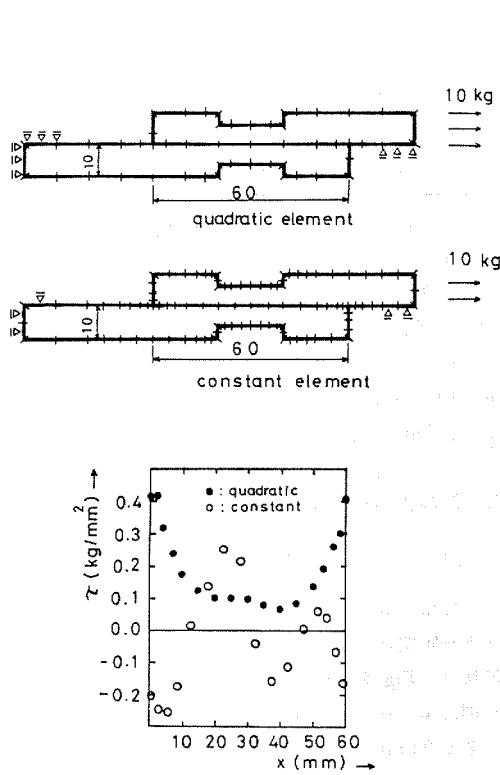


Fig. 9 Element configurations and shear stress distributions by each element. (Concave lap joint)

素による解である。

Fig. 8は、単純重ね合わせ継手であり、この程度の単純な形状の継手では、当然ながらほぼ同じ値となっている。

Fig. 9は、被着体の一部に凹部があるもので、一定要素の場合の精度は極端に悪いが、2次要素による解はほぼ正解と思われる。

Fig. 10は、接着部の一端にフィレットがあるもので、一定要素による解はFig. 9と同様誤りであるが、2次要素ではほぼ妥当と思われる解が得られた。

### 5. 結 言

著者らは、これまでに一定要素を用いた境界要素法による接着接合物の応力解析プログラムを開発してきたが、複雑な形状を持つ接着接合物では、精度が不十分で解析が行えないことがあった。そこで解析精度を向上させるため、今回2次要素の導入を検討し、特に2次要素を導入する場合に問題となる、数値積分の積分点数と精度及び、連立一次方程式の解の精度について検討した。これらの点について、具体的な解析モデルを用いて計算実

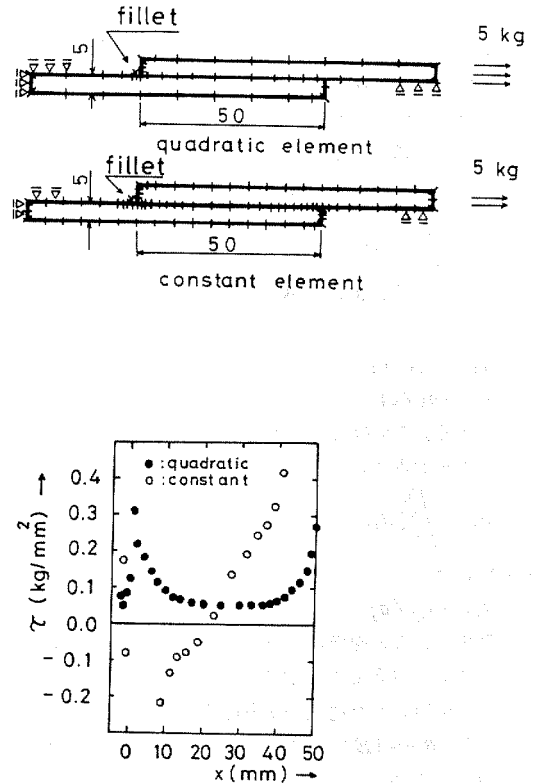


Fig. 10 Element configurations and shear stress distributions by each element. (Single lap joint with spew fillet)

験を行ない、次の点が明らかとなった。

(1) 数値積分の積分点数は、Legendre-Gaussの数値積分において、節点と要素との距離  $r$  と要素の長さ  $l$  との比  $r/l$  が、10以上のとき6点積分、0.4以上のとき12点積分とするのが計算の精度及び時間の面で効率が良い。また  $r/l$  が0.4未満のときは二重指数型積分を行なうのが良く、 $r/l$  が0.01のとき、分割幅  $h$  は0.01でほぼ十分な精度が得られた。

(2) 最終的に解くべき連立一次方程式は、Gaussの消去法よりも共役勾配法が精度的に良く、またこのとき事前にスケーリングを行なうことにより、収束までの繰り返し回数が20~60%減少する。なお収束判定係数は  $10^{-5}$  程度が適切である。

(3) これにより、従来解析が困難であった複雑な形状を持つ接合物の応力解析が、精度良く行なえるようになった。

### Appendix 2次要素と二重節点の処理

ここで、従来用いてきた一定要素と今回用いた2次要素の違い、および2次要素を用いるに際しての二重節点

の処理について説明する。

**A.1 2次要素**

境界要素法において用いられる要素には、一定要素(0次要素), 線形要素(1次要素), 2次要素, ...とあり, 一般的には要素の次数が高いほど, 少ない要素数で精度の良い解が得られる。

一定要素とは, 要素上の物理量(変位, 表面力)の値が一定であるとしたものであり, 2次要素とは, これらの値が2次的に変化するとしたものである。則ち, Fig. A.1 に示すように, 一定要素では要素上の1点(普通は中点)を節点とし, この1点で要素上の値を代表させ, 2次要素では要素上の3点(中点と両端点, あるいは中点と両端から1/6の点)を節点とし, これら3点で要素上の値を2次関数的に変化させるものである。これらの要素を用いた場合の境界上の物理量の変化の様子をFig. A.2に示す。ここで, 2次要素における節点のとり方には普通2種類考えられる。1つはFig. A.1, Fig. A.2の(b)の様に要素中点と要素両端点にとるものであり, 他の1つは同図(c)の様に要素中点と要素両端点から1/6のところにとるものであり, 前者は適合要素, 後者は非適合要素と呼ばれている。つまり Fig. A.2の(b)と(c)を比べると, (b)では要素端点での値が隣の要素端点との値と一致し変位の連続性が満たされるが, (c)ではこの値が不連続となる。また, 同じN個の要素分割を行なった場合, 全節点数は, Fig. A.1からわかるように, (b)では2N個になるのに対し(c)では3N個となり, 最終的に解くべき連立一次方程式の元数は(b)が(c)の2/3となり計算機の記憶容量の面で有利となる。本研究では, このような理由からプログラムの開発に際して適合要素を用いた。

境界積分方程式の数値解析における離散化方程式は, 2次要素の場合, 一定要素の場合と比べて複雑となるので, 以下に具体的な定式化を簡単に示す。

ポテンシャル問題における境界積分方程式は, 式(A.1)のように表される。

$$c_i \cdot u_i + \int_{\Gamma} u \cdot q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q \cdot u^* d\Gamma \quad (A.1)$$

ここで,  $u, q$ は境界上の変数であり $u^*, q^*$ は基本解であり既知のものである。式(A.1)を一般的な離散化した式で表せば, 要素数をNとすると, 単に一周積分をN個に区切って足し合わせた形として,

$$c_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_j \cdot q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q_j \cdot u^* d\Gamma \quad (A.2)$$

となる。一定要素の場合は, まず(A.2)式における係数 $c_i$ は恒等的に1/2となり, また $u, q$ は要素上で一定値

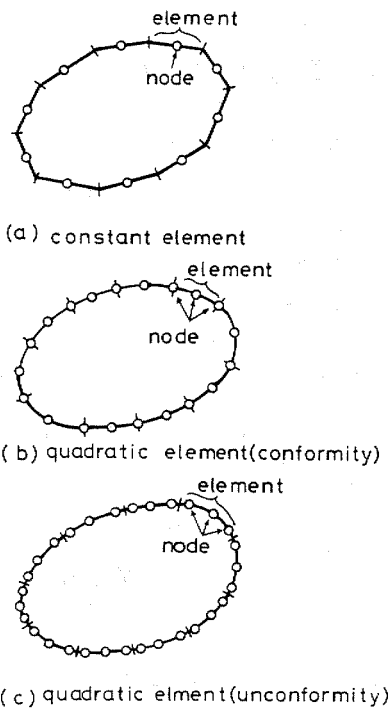


Fig. A.1 A constant element and Quadratic elements.

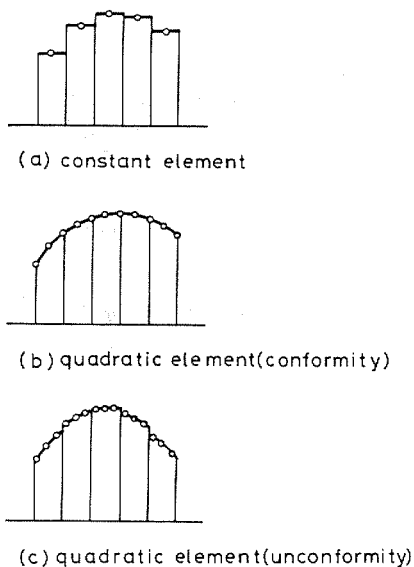


Fig. A.2 Type of each functional values.

という条件から  $\int$  の外に出すことができ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{q}^* d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* d\Gamma \right) \cdot \mathbf{q}_j \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる。(A.3)式の両辺の積分項をそれぞれ次の様に,  $\mathbf{H}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}$  と書くと,

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} \mathbf{q}^* d\Gamma & i \neq j \text{ のとき} \\ \int_{\Gamma_j} \mathbf{q}^* d\Gamma + \frac{1}{2} & i = j \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (\text{A.5})$$

(A.3)式は, 次式の様に境界上の全ての  $\mathbf{u}$  (変位),  $\mathbf{q}$  (表面力) に対して簡単に表すことができる。

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \cdot \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{q}_j \quad (\text{A.6})$$

式(A.6)における基本解の積分  $\mathbf{H}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}$  の  $i, j$  成分は  $[2 \times 2]$  のサブマトリックスであり解析的に計算することができる。

2次要素の場合は, 一定要素の時のように未知数の値が要素上で一定値ではないため, 式(A.2)の  $\mathbf{u}_j$ ,  $\mathbf{q}_j$  はそのまま  $\int$  の外に出すことはできない。また積分の計算も複雑となり数値積分によらざるを得ない。

要素上の関数値の積分は, 一定要素の場合もそうであったが, Fig. A.3 に示す様に  $x-y$  全体座標系から要素上の  $\eta-\xi$  局所座標系に座標変換して積分するのが便利である。

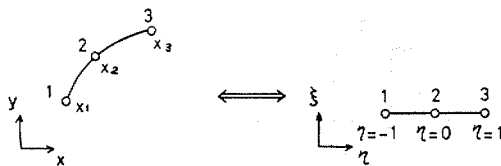


Fig. A.3 Transformation of coordinates system.

まず, (A.2)式の積分を変数  $\Gamma(x, y)$  を  $\eta$  に変換するためには, 要素上の変数  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\mathbf{q}(x)$  を3種類の内挿関数  $N_1, N_2, N_3$  及び要素上の各節点の未知数を用いて  $\eta$  の関数として表せば,

$$\mathbf{u}(\eta) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{u}] \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{q}(\eta) = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 = [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{q}] \quad (\text{A.8})$$

ここで,

$$[\mathbf{N}]^T = [N_1 N_2 N_3]$$

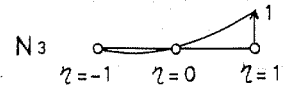
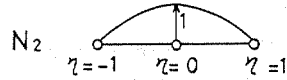
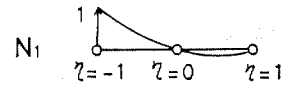


Fig. A.4 Distribution of each interpolated function.

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

また, 内挿関数  $N_1, N_2, N_3$  の形は,

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{2}(1-\eta)\eta \\ N_2 = (1-\eta)(1+\eta) \\ N_3 = \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

であり, それぞれ Fig. A.4 に示すような変化をするものである(一定要素の場合は, 内挿関数は一種類で  $N=1$  である)。また,  $x, y$  はそれぞれ  $\eta$  の関数として

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

と表される。

次に, 境界積分方程式の離散化式(A.2)の左辺第2項に変数  $\mathbf{u}$  を  $\eta$  の関数として表した式(A.7)を代入すると,

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{q}^* d\Gamma \quad (\text{A.11})$$

ここで  $d\Gamma$  は,  $x-y$  座標系における  $\eta$  方向の微係数であるから

$$d\Gamma = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\eta} \right| d\eta$$

であり

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} d\eta \quad (\text{A.12})$$

となる。これを, (A.11)式の積分に代入すると積分区間を  $[-1, 1]$  として

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}^* d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T [\mathbf{u}] \mathbf{q}^* \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$



ここで

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} = |G| \quad (A.14)$$

と書くと、

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}^* d\Gamma = \int_{-1}^1 [N]^T [\mathbf{u}] \mathbf{q}^* |G| d\eta \quad (A.15)$$

即ち、(A.2)式は、次の様になる。

$$\begin{aligned} c_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 [N]^T \mathbf{q}^* |G| d\eta [\mathbf{u}] \\ = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 [N]^T \mathbf{u}^* |G| d\eta [\mathbf{q}] \end{aligned} \quad (A.16)$$

(A.16)式の積分は、解析的に解くのは困難であるが、数的に解くことはできる。一般的には、この積分は次式に示す Legendre-Gauss の数値積分公式を用いて行なわれる。

$$\int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^m w_i F(\eta_i) \quad (A.17)$$

$w_i$  : 重みの値,  $\eta_i$  : 座標値,  $m$  : 積分点の個数  
(A.17)式を(A.16)式に用いると

$$\begin{aligned} c_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \left( \sum_{l=1}^m |G|_l \cdot w_l (\mathbf{q}^* \cdot [N]^T)_l \right) \cdot [\mathbf{u}] \\ = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{l=1}^m |G|_l \cdot w_l (\mathbf{u}^* \cdot [N]^T)_l \right) \cdot [\mathbf{q}] \end{aligned} \quad (A.18)$$

と表される。ここで、係数  $c_i$  はまだ決定されていないが、剛体移動しないという条件から  $i \neq j$  の成分のマイナス和として間接的に求めることができる。式(A.18)が、一定要素における式(A.3)に対応するものである。

以下(A.4)式からの同様の手続きにより、(A.6)式を構成することができる。ここで、一定要素の場合は一組の  $i, j$  に対して  $2 \times 2$  のサブマトリックスを生成したが、2次要素の場合は要素上に節点が3個あるから、 $2 \times 6$  のサブマトリックスが生成される。また、2次要素の適合要素の場合は要素端の節点の積分値に関しては、両要素に対する積分値の和をとる必要がある。

### A.2 二重節点の処理

次に、表面力の不連続を考慮した二重節点の、実際的な処理方法について説明する。

2次要素の適合要素では、要素の中心と両端点に節点を取り、端部の節点に対する係数は、その節点を含む要素の寄与分を加え合わせ、1つの節点として解くため、要素のつなぎめにおいて、変位、表面力の連続性が自動的に満たされる。しかし、Fig. A.5における節点  $i$  は、表面力の値が、要素  $j$  から見れば0(自由表面)であるが要素  $i+1$  から見れば  $p$  (負荷節点) であり、明らかに表

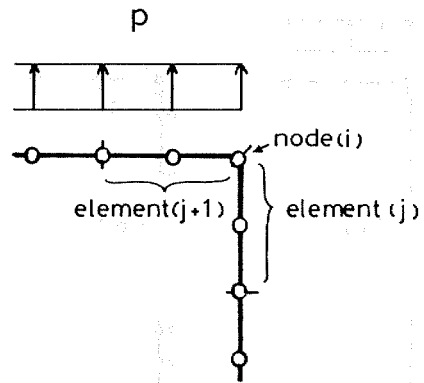


Fig. A.5 A double node.

面力は不連続である(変位はどちらの要素から見ても同じ)。このような節点に対して普通の節点と同様に解析すれば、表面力に対して現実と反した解が得られてしまう。そこで、このような表面力の不連続性を考慮するために、同一座標を持つ2つの節点(二重節点)を用いる必要がある。ただし、同一座標に2つの節点を考えても、両節点の変位が等しいという条件により、最終的に解くべき連続一次方程式は解くことができる。

以下、種々の境界条件を持つ二重節点について、最終的に解くべき連立一次方程式

$$[A] [X] = [B] \quad (A.19)$$

の構成に対するプログラム上の処理方法について説明する。ここで、次式のように節点における  $[u]$  の係数を  $[H]$ 、 $[q]$  の係数を  $[G]$  とおく。

$$[H] [u] = [G] [q] \quad (A.20)$$

#### A.2.1 節点 $i$ と $i+1$ の表面力が既知の場合 (Fig. A.6(a))

この場合は、 $[u]_i = [u]_{i+1}$  が未知であるから、式(A.19)の  $[A]$  には  $[H]_i + [H]_{i+1}$  が入り、 $[B]$  にはそれぞれの節点に対する  $[q] \times [G]$  の値の和を入れる。即ち、

$$[G]_i [q]_i + [G]_{i+1} [q]_{i+1} = [B]_i$$

となる。

#### A.2.2 節点 $i$ の表面力と節点 $i+1$ の変位が既知の場合 (Fig. A.6(b))

この場合は、 $[q]_{i+1}$  が未知であり、また  $[u]_{i+1}$  が既知であるから  $[u]_i$  も既知となり、従って、式(A.19)の  $[B]$  には、

$$\begin{aligned} -[H]_i [u]_{i+1} - [H]_{i+1} [u]_{i+1} + [G]_i [q]_i \\ = [B]_i \end{aligned}$$

が入り  $[A]$  には、 $-[G]_{i+1}$  のみが入る。

#### A.2.3 領域の境界の場合

① 節点  $i$  の表面力が既知であり  $i$  の変位と  $i+1$  の表面力が未知の場合 (Fig. A.6(c))

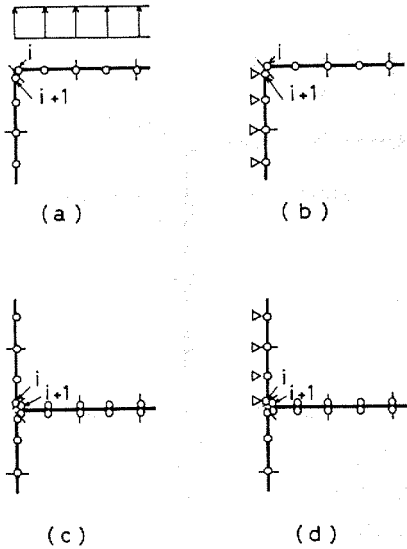


Fig. A.6 Double nodes on each boundary condition.

この場合は、 $[q]_i$  のみが既知であるため (A.19) 式の  $[B]$  に入るのは、 $[G]_i [q]_i = [B]_i$  だけであり  $[A]$  に入るのは、 $[H]_i + [H]_{i+1}$  と  $[G]_{i+1}$  である。ただし  $[H]$  と  $[G]$  は別々の列に入れる。

ここで未知数の増えた分 (変位と表面力の2種類になった分) は、それぞれの相対する領域の節点との、変位の適合条件と表面力の釣合条件を付加することにより、最終的な式 (A.19) は、解くことができる。

② 節点  $i$  の変位が既知であり  $i+1$  の変位と  $i+1$  の表面力が未知の場合 (Fig. A.6 (c))

この場合は、 $[u]_i$  が既知であるため  $[u]_{i+1}$  も既知となる。従って (A.19) 式の  $[B]$  に入るのは  $-[H]_i [u]_i$  と  $-[H]_{i+1} [u]_i$  であり、それぞれ別の行に入れる。また、 $[A]$  に入るのは、 $-[G]_i$  と  $-[G]_{i+1}$  であり、それぞれ別の列に入れる。

ここで未知数の増えた分 (表面力が2種類になった分) は、それぞれの相対する領域の節点との、変位の適合条件と表面力の釣合条件を付加することにより、最終的な式 (A.19) は、解くことができる。

以上のような二重節点の処理方法を行なうことにより、最終的に解くべき連立一次方程式の元数は、 $N$  個に要素分割した場合は  $2N$  個のままとなり、増加することはない。

参考文献

- 1) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, **21**, (4) 136 (1985).
- 2) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, **22**, (5) 244 (1986).
- 3) 宇多村元昭, 小泉 真, 狩野泰信, 日立評論, **67**, (6), 51 (1985).
- 4) 小貫 天, 佐藤恵一, 高橋昌昭, 電気学会回転機静止器合同研究会資料, RM-84-54 (1984).
- 5) 東町高雄, 江沢良孝, 岡本紀明, 相沢民王, 日本機械学会論文集 (A編), **51**, 468 (1983).
- 6) 三好俊郎, 有限/境界要素解析プログラミング, サイエンス社, (1985).

Stress-Strain Analysis of Adhesive Bonded Joints by Boundary Element Method (BEM) using a Quadratic Element

Tetsuya NISHIKAWA and Kousuke HARAGA

Materials and Electronic Devices Laboratory,  
MITSUBISHI Electric Corp.

(1-1, Tsukaguchi-Honmachi, 8-chome, Amagasaki, Hyogo, 661 JAPAN)

Abstract

Stress-Strain around Adhesive Bonded Joints is generally analyzed by use of the Finite Element Method (FEM). It is easier however, to use BEM than to use FEM in consideration of element configurations. So the BEM program using a constant element for adhesive bonded joint has already been produced by us. This program gave proper solutions for simple form joints (ex: Single lap joints, Double lap joints, etc), but it did not give proper solutions for complex form joints. In order to get accurate solutions in every case, we introduce a quadratic element.

Accuracy of numerical integration, which is inevitable for using a quadratic element, and numerical solutions of linear equations by analyzing of an adhesive bonded joint model were examined.

The results obtained are as follows:

(1) As for the accuracy of numerical integration, the profitable integral degrees of Legendre-Gauss Formula are defined as follows.

$$\begin{array}{ll} 1.0 > r/l \geq 0.4 & 6\text{-degrees} \\ 0.4 > r/l & 12\text{-degrees} \end{array}$$

where  $r$  is the distance from a source point to an element, and  $l$  is the element length. A proper cutting width of the domain of integration about Double Exponential Formula equals 0.01 when  $r/l$  equals 0.01.

(2) As for the accuracy of numerical solutions of linear equations in the Conjugate Gradient Method, the proper value that decides the convergence of solution equals  $10^{-5}$ , and the repetition number until convergence reduced about 20~60% by excuting scaling.

(3) According to these, the solutions of complex form joints are given with high accuracy.

(Received: April 23, 1986)