

〈論文〉

(受理：昭和59年11月24日)

境界要素法による接着継手の応力解析

西川 哲也*，原賀 康介*

要 旨

本研究では、境界要素法による接着系の応力解析プログラムを作成し、二重重ね合わせ継手に対して応力解析を行ない解の妥当性を確かめた。

まず接着系モデルの様な、被着体-接着層-被着体の3つの異なった材料からなる非均質材料の問題に対する境界要素法の方程式系を示した。

また、この連立一次方程式を解く上で各材料の要素番号順は、第一番目の領域は界面でない部分から、第二、第三番目の領域では、界面の部分から付け始めるのが良く、さらに連立一次方程式の解法は、共役勾配法を用い、収束判定の係数は、0.0001程度が収束性及び計算時間の点で最適であることを見出した。

次に、二重重ね合わせ継手に対して境界要素法で応力解析を行ない、解析解と比較した結果、両者はほぼ同じ値を示し、接着継手のような薄い接着層を有する物体の応力解析に、境界要素法が適用でき、また有利であるということがわかった。

1. 緒 言

接着継手の応力解析に関しては、従来から単純重ね合わせ継手、二重重ね合わせ継手等に対して、各種の仮定を行なった解析解が幾つか得られているが¹⁾、一般的な任意の形状、及び荷重条件に対しては十分な仮定を行なうことが困難なため、一般に有限要素法による数値解析が行なわれている²⁾。しかし有限要素法は、解析に際して領域内を要素分割するため、接着層のような極めて薄い異種材料の層を含む力学系に関しては、要素分割数が膨大となり、データの作成、計算機の記憶容量、計算時間等の面で問題点も多い。

一方、境界要素法は、境界上のみを要素分割すればよいから、例えば2次元解析の場合、要素は1次元の線要素となり、分割は領域の表面及び界面に対して行なうため、有限要素法に比べ、接着層内の要素及び被着体の接着面付近の要素の分割数が大幅に減少し、接着系モデルの応力解析に関して有益な方法と思われる。

ところが、これまで境界要素法による接着継手の応力解析は、ほとんど報告されていない³⁾。そこで、われわれは、接着部の応力解析に関して、境界要素法の適用を

試み、応力解析プログラムを試作しその有用性、妥当性について検討した。ここでは、その実際的な計算方法、及び具体的モデルに対する解析結果について述べる。

2. 理 論

2.1 接着系の方程式系

均質な材料については、Fig. 1に示すように n 個の境界要素に分割された、境界上のそれぞれの要素における、変位 $[U^i]$ と表面力 $[W^i]$ に関して、次のような連立一次方程式系が成り立つ。

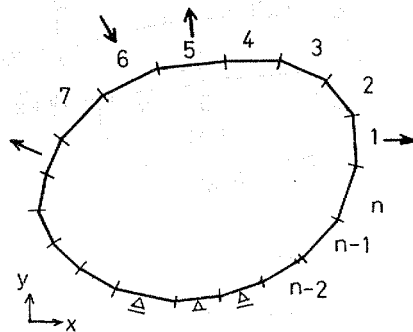


Fig. 1 Homogeneous materials model.

*三菱電機(株)材料研究所

兵庫県尼崎市塚口本町 8-1-1 〒661

$$\begin{bmatrix} A_{xx}^{11} & A_{yx}^{11} & A_{xx}^{12} & A_{yx}^{12} & \dots & A_{xx}^{1n-1} & A_{yx}^{1n-1} & A_{xx}^{1n} & A_{yx}^{1n} \\ A_{xy}^{11} & A_{yy}^{11} & A_{xy}^{12} & A_{yy}^{12} & \dots & A_{xy}^{1n-1} & A_{yy}^{1n-1} & A_{xy}^{1n} & A_{yy}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{xx}^{n1} & A_{yx}^{n1} & A_{xx}^{n2} & A_{yx}^{n2} & \dots & A_{xx}^{nn-1} & A_{yx}^{nn-1} & A_{xx}^{nn} & A_{yx}^{nn} \\ A_{xy}^{n1} & A_{yy}^{n1} & A_{xy}^{n2} & A_{yy}^{n2} & \dots & A_{xy}^{nn-1} & A_{yy}^{nn-1} & A_{xy}^{nn} & A_{yy}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ \vdots \\ U_x^n \\ U_y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx}^{11} & B_{yx}^{11} & B_{xx}^{12} & B_{yx}^{12} & \dots & B_{xx}^{1n-1} & B_{yx}^{1n-1} & B_{xx}^{1n} & B_{yx}^{1n} \\ B_{xy}^{11} & B_{yy}^{11} & B_{xy}^{12} & B_{yy}^{12} & \dots & B_{xy}^{1n-1} & B_{yy}^{1n-1} & B_{xy}^{1n} & B_{yy}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{xx}^{n1} & B_{yx}^{n1} & B_{xx}^{n2} & B_{yx}^{n2} & \dots & B_{xx}^{nn-1} & B_{yx}^{nn-1} & B_{xx}^{nn} & B_{yx}^{nn} \\ B_{xy}^{n1} & B_{yy}^{n1} & B_{xy}^{n2} & B_{yy}^{n2} & \dots & B_{xy}^{nn-1} & B_{yy}^{nn-1} & B_{xy}^{nn} & B_{yy}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x^1 \\ W_y^1 \\ \vdots \\ W_x^n \\ W_y^n \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、係数マトリックス $[A]$ 、 $[B]$ の成分は、それぞれの要素の相対的位置関係及び、材料定数により解析的に求まる。(1)式に任意の荷重条件、拘束条件を与えることにより、既知の変位ベクトル $[U^i]$ 又は、表面力ベクトル $[W^i]$ に対応する係数マトリックスの列を、一方の辺にまとめることができ、これを解くことにより境界上の全ての未知の変位又は表面力を求めることができる。

次に接着系の様に接着層と2種類の被着体、合計3種類の異種材料から成る非均質な系に対する、方程式系(1)の拡張を示す。

Fig. 2に示す様に、3種類の材料の有するそれぞれの領域を、領域-[K]、領域-[L]、領域-[M]とし、又それぞれの界面を、界面-[KL]、界面-[LM]とする。図において領域-[L]は接着層、領域-[K]と領域-[M]は被着体を想定したものである。

このような系では、まずそれぞれの領域において(1)式がそれぞれ成り立たなければならない。即ち、

$$[K] : [A^K] [U^K] = [B^K] [W^K] \quad (2)$$

$$[L] : [A^L] [U^L] = [B^L] [W^L] \quad (3)$$

$$[M] : [A^M] [U^M] = [B^M] [W^M] \quad (4)$$

である。上記(2)~(4)式だけでは、界面部分の要素の変位、表面力の両方とも未知数であるため、この連立一次方程式は不定となる。そこで界面における変位と表面力に対して成り立つ方程式系を上式と連立させれば、界面部分の要素の変位と表面力の両方を決定することができる。界面-[KL]界面-[LM]で成り立つ方程式系は、変位の適合条件と表面力の釣合条件である。即ち、

$$[KL] : [U_{KL}^K] = [U_{KL}^L] \quad (5)$$

$$[W_{KL}^K] = -[W_{KL}^L] \quad (6)$$

$$[LM] : [U_{LM}^L] = [U_{LM}^M] \quad (7)$$

$$[W_{LM}^L] = -[W_{LM}^M] \quad (8)$$

である。これらの(2)~(8)式は、普通大次元の連立一次方程式として計算機により解かれる。従って数値解析的に言えば、これらの式を一つの連立一次方程式としてまとめた場合その係数行列がバンドマトリックスに近く、解きやすい型に配置することが望ましい。そのためには、各領域の要素番号順のとり方に注意を要する。つまり、各領域の要素番号はどの要素から付け始めても(2)~(8)式を満足する連立一次方程式を構成すれば、理論的には問題はないが、実際的な数値計算上では例えば連立一次方程式の係数行列の対角成分及び、その付近にゼロ成分が多く集まるなどの、いわゆる解きにくい連立一次方程式となる場合が多い。従ってこれを避けるためには、各領域の要素番号は、一つ手前の領域との界面部分(Fig.2で言えば、領域-[L]では界面-[KL]、領域-[M]では界面-[LM])から付け始め、一つ後の領域との界面(Fig.2で言えば、領域-[K]では界面-[KL]、領域-[L]では界面-[LM])で付け終わるという順が最も適当と思われる(Fig.2の付け方)。Fig.2のような要素番号順では、全体の連立一次方程式は次のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} A^K & A_{KL}^L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{KL}^L & B_{KL}^L & A^L & A_{LM}^L & B_{LM}^L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^M & -B_{LM}^M & A^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^K \\ U_{KL}^K \\ W_{KL}^K \\ U_{LM}^L \\ U_{LM}^M \\ W_{LM}^M \\ U^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^K & 0 & 0 \\ 0 & B^L & 0 \\ 0 & 0 & B^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^K \\ W^L \\ W^M \end{bmatrix} \quad (9)$$

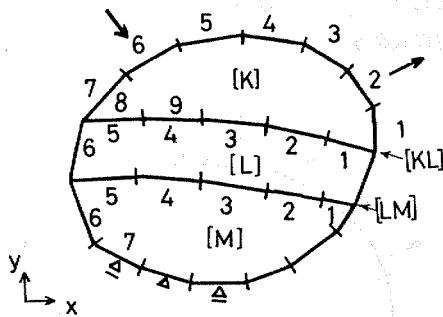


Fig. 2 Heterogeneous materials model.
 [K] : Adherend
 [L] : Adhesive layer
 [M] : Adherend
 [KL] : The interface between [K] and [L]
 [LM] : The interface between [L] and [M]

上式が(1)式を接着系モデルに対して数値解析を考慮して拡張されたもので、この連立一次方程式を与えられ

た境界条件のもとで解けば、境界上の全ての未知の変位、表面力を得ることができる。

(9)式から明らかなように要素番号順を Fig. 2 のようにつけることにより連立一次方程式の係数行列は、バンドマトリックスに近くなり解く上で有利となる。

2.2 接着層の応力, 歪

(9)式により全ての領域上の変位と表面力が決定される。ここで Fig. 2 の接着系モデルの接着層を仮定した領域-[L]上の全ての要素の変位と表面力の値を用いて、接着層の応力と歪の値を以下の7つの式を連立させた7元連立一次方程式を解くことにより、近似的に得られる (Fig. 3 参照)。

$$\frac{du}{ds} = -n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{dv}{ds} = -n_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_x \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$$W_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \quad (15)$$

$$W_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \quad (16)$$

ここで、

- σ_{xx} : 垂直応力 (x 方向)
- σ_{yy} : 垂直応力 (y 方向)
- τ_{xy} : 剪断応力
- u : 変位 (x 方向)
- v : 変位 (y 方向)
- W_x : 表面力 (x 方向)
- W_y : 表面力 (y 方向)

である。

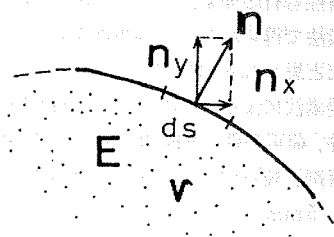


Fig. 3 Stress and strain on an element.
 E : Young's modulus
 nu : Poisson' ratio
 s : length along the boundary
 n : a unit vector along the external normal
 nx : x-direction cosine of n
 ny : y-direction cosine of n

3. 計算方法

2. で述べたことを、実際に計算機で計算させるための具体的手順を示すと次のようになる。

a. データのインプット

要素の x, y 座標, ヤング率, ポアソン比, 境界条件, 荷重条件

b. それぞれの領域についての係数マトリックス (1) 式の計算

c. 全体の係数マトリックス (9) 式の構成

d. (1) 式の係数マトリックスを境界条件により並べ替え, 未知の変位, 表面力に関する連立一次方程式を構成

e. 連立一次方程式を解く

f. 得られた解を, それぞれの領域の変位と表面力とに並べ替える。

g. 得られた接着層領域の変位と表面力を用いて, 接着層の応力と歪を求める 7 元連立一次方程式を構成

h. 7 元連立一次方程式を解く

i. 結果のアウトプット

上記 a, b 及び g, h, i は, 一般的な均質材料に対するものと同じで, その具体的手法は種々の文献⁴⁾に示されているため説明を省略し, ここでは c 及び e について検討した結果を述べる。また上記 d, f については, プログラミングが複雑なだけであるので説明を省略する。

3.1 全体の係数マトリックス (9) 式の構成

ここでは (9) 式の左辺の係数マトリックスの各成分が, 具体的にどのように配置されるかについて述べる。

この係数マトリックスを構成する際に注意を要することは, 各領域の界面の要素の列の成分が, 他の領域の同じ要素の列の成分と同じ列に位置しなければならないということである。つまり, 例えば Fig. 4 に示すように, 領域-[K]と領域-[L]の共通要素の要素番号付けを行なったとする。この場合係数マトリックスの界面-[KL]に相当する部分マトリックス ((9) 式の枠で囲んだ部分) の成分の配置は, Fig. 5 の様になる。

成分 B についても同様であり (但し両領域の成分の符号は逆) また界面-[LM]についても同様である。この

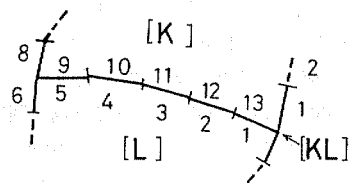


Fig. 4 Number on the common elements.

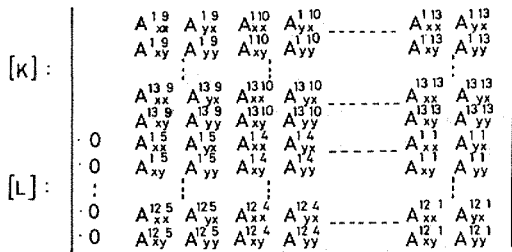


Fig. 5 The arrangement of matrix components.

ように、全体の係数マトリックスを構成する際、界面では、一方の領域の係数マトリックスの列が初めに求めたもの((1)式)の2列ずつ対になって逆にしたものとなることに注意を要する。これは、それぞれの領域の要素番号順は、それぞれ逆方向に進むこと、及び座標 $x-y$ は領域によらないことの2つの理由による。

3.2 連立一次方程式の解法

本研究で試作したプログラムでは、上記 e の連立一次方程式の解法として共役勾配法を用いた。共役勾配法は反復法の一つであり、解の収束の判定は以下により行なった⁵⁾。即ち、連立一次方程式、

$$[D][X] = [E] \tag{17}$$

の解 $[X]$ を求めるために、第 n 回目に修正された解 $[X_n]$ に対する

$$[H_n] = [E] - [D] \cdot [X_n] \tag{18}$$

の成分の絶対値の最大値 $\|H_n\|_\infty$ が、ある程度小さくなった時に $[X_n]$ を (17) 式の解 $[X]$ とみなす。ここで、 $\|H_n\|_\infty$ が、どの程度小さくなら収束とみなすかは、次の係数 F により決定する。即ち、

$$\|H_n\|_\infty \leq F \|E\|_\infty \tag{19}$$

$\|E\|_\infty$ は (17) 式のベクトル $[E]$ の成分の絶対値の最大値である。この収束の判定を行なう係数 F の値は、連立一次方程式の性格及び元数等により経験的に決定されるものであるが、本研究では、この係数 F の値の最適値を得るために 100 元程度の元数で種々の計算を行なった。

ここでその一例として、Fig. 6 に F の値を $F=0.01$, 0.001 , 0.0001 , 0.00001 の4種類の値に対して得られた解(二重重ね合わせ継手の剪断応力分布)を示す。また Table 1 は、その時の解が収束するまでの繰り返し回数である。Fig. 6 と Table 1 より $F=0.01$ 及び 0.001 では、得られた解が不適當で収束性の点で不完全であり、又 $F=0.00001$ では、収束までの繰り返し回数が大きすぎ計算時間の面で不適當であり、 $F=0.0001$ 程度なら、 $F=0.00001$ と同じ結果を示しており、最も効率が良かった。

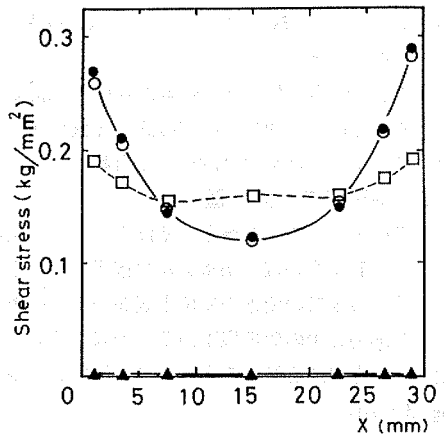


Fig. 6 Shear stress distributions.

- ▲ $F=0.01$ ○ $F=0.001$
- $F=0.0001$ ● $F=0.00001$

Table 1 Repetition number till convergence at each F .

F	0.01	0.001	0.0001	0.00001
Number	22	148	254	548

(また解析の前に係数マトリックスの各成分のスケールリング(各成分間のオーダーを合わせる)を行なうことにより収束性が 1.2~1.7 倍程度上がった(収束までの繰り返し回数減少した)。

4. 計算結果及び考察

以下に、境界要素法により実際に接着継手の応力解析を行ない、解析解と比較した結果を示す。解析モデルは Fig. 7 に示した二重重ね合わせ継手である。二重重ね合わせ継手は、一般的な解析が得られており¹⁾、またその解の妥当性も有限要素法により確かめられているため⁶⁾、境界要素法で得られた解の妥当性を確認するには適当なモデルだと思われる (Fig. 7)。

境界要素法による、二重重ね合わせ継手の要素分割図、境界条件、荷重条件を Fig. 8 に示す。又、継手の寸寸法、及び接着剤、被着体の各材料定数は以下の通りとした。

- $t_1 = 5 \text{ mm}$
- $t_2 = 5 \text{ mm}$
- $t_c = 0.1 \text{ mm}$
- $L = 30 \text{ mm}$
- $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$
- $\nu = 0.3$ (板のポアソン比)
- $E_c = 100, 300, 500 \text{ kg/mm}^2$ (接着層のヤング率)
- $\nu_c = 0.35$ (接着層のポアソン比), $P = 5 \text{ kg}$

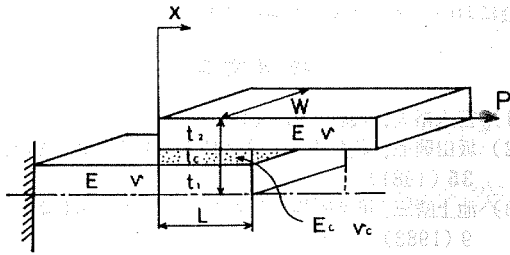


Fig. 7 Double lap joint.

- $2t_1$: Adherend thickness
- t_2 : Adherend thickness
- t_c : Adhesive thickness
- L : Lap length
- W : Width of the joint
- E : Young's modulus of adherends
- E_c : Young's modulus of adhesive
- ν : Poisson's ratio of adherends
- ν_c : Poisson's ratio of adhesive
- P : Tension

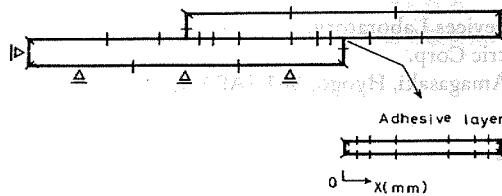


Fig. 8 Boundary condition and boundary element configuration (Double lap joint).

計算は、接着層のヤング率3種類について行なった。計算結果をFig. 9～Fig. 10に示す。Fig. 9は、接着層の各ヤング率における接着層に働く剪断応力分布図であり、●は境界要素法による数値解、一は解析解である。また、Fig. 10はそれぞれの接着層の変形図である。Fig. 9において、接着層に働く剪断応力の数値解は、実際には接着層の上面の要素、及び下面の要素と、同じx座標に2つずつ求められているが、Fig. 8に示す程度の比較的粗い要素分割では、両者の差はほとんど見られないため、それぞれのx座標に対して一点のみをプロットしている。尚、要素分割をさらに細かくすると、接着層端部の上面と下面の応力の相違は得られるし、またさらに、接着層の厚さ方向にも要素分割を行なうことにより厚さ方向の応力分布を求めることも可能である。

Fig. 9の各応力分布図より、接着層に働く応力分布は、接着層の各ヤング率に対して解析解とはほぼ同じ程度となっており、境界要素法による解の妥当性が確かめられた。

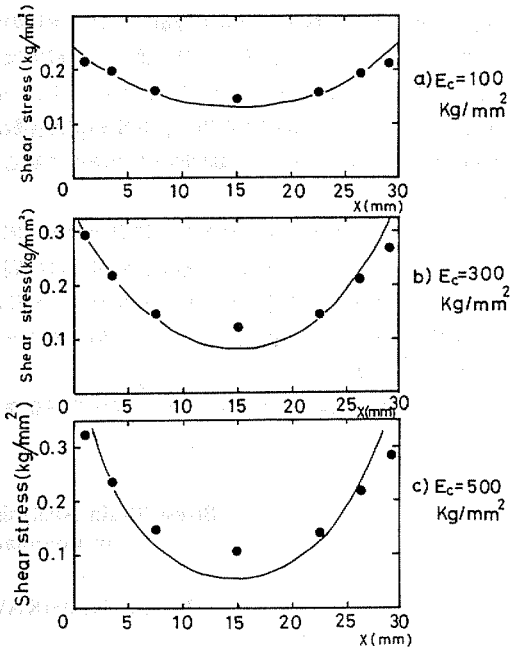
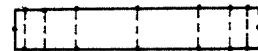
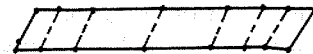


Fig. 9 Shear stress distribution at each Young's modulus of adhesives.

● BEM — analytic solution



Initial state



a) $E_c = 100 \text{ kg/mm}^2$



b) $E_c = 300 \text{ kg/mm}^2$



c) $E_c = 500 \text{ kg/mm}^2$

Fig. 10 Displacement of adhesive layers.

5. 結 言

本研究では、境界要素による接着継手の応力解析プログラムを作成し、二重重ね合わせ継手に対して応力解析を行ない、解の妥当性を確かめた。

まず、接着系モデルのような、被着体-接着層-被着体の3つの異なる材料からなる非均質材料の問題に対する境界要素法の方程式系を示した。またこの連立一次

方程式を解く上で各材料の要素番号順は、第一番目の領域は界面でない部分から、第二、第三番目の領域では、界面の部分から付け始めるのが良く、さらに連立一次方程式の解法は、共役勾配法を用い、収束判定の係数は0.0001程度が、収束性及び計算時間の点で最適であることを見出した。

次に、二重重ね合わせ継手に対して境界要素法で応力解析を行ない、解析解と比較した結果、両者はほぼ同じ値を示し、接着継手のような薄い接着層を有する物体の応力解析に境界要素法が適用でき、また有利であるということがわかった。

本研究は、昭和59年6月8日、第22回接着研究発表

会において講演発表したものである。

参考文献

- 1) 宮入裕夫, 接着, 276 (1970)
- 2) 坂田興亜, 磯井雄一, 機械技術研究所所報, Vol. 35 (1981)
- 3) 池上皓三, 第2回構造接着シンポジウム講演論文集, 9 (1983)
- 4) 神谷紀生, 境界要素法の基礎, 培風館 (1982)
- 5) 戸川隼人, 共役勾配法, 教育出版, 131 (1977)
- 6) 松田 弘, 昭和52年度構造接着研究委員会, (8)-16 (1967)

Stress-Strain Analysis of Adhesive Bonded Joints by Boundary Element Method

Tetsuya NISHIKAWA and Kousuke HARAGA

Materials and Electronic Devices Laboratory,
Mitsubishi Electric Corp.

(1-1, Tsukaguchi-Honmachi, 8chome, Amagasaki, Hyogo, 661 JAPAN)

Abstract

In this study, we prepared a stress-strain analysis program of adhesive bonded joints by Boundary Element Method, and we could get proper numerical solutions about shearing stress of double lap joints by use of the program.

First, the practical methods of stress-strain analysis about adhesive bonded joints by Boundary Element Method are concerned, and available means we found in this process are given. That are desirable means of numbering about each boundary's elements in consideration of numerical analysis, and the standard value that decide the convergence of solution about linear equations in use of the Conjugate Gradients Method.

Secondary, we actually analysed of stress-strain about the double lap joints by the use of the program, and confirmed its property by comparing with analytic solution and the use of the Boundary Element Method about stress-strain analysis of adhesive bonded joints.

(Received: November 24, 1984)