

〈論文〉

(受理：昭和63年12月26日)

境界要素法による接着接合物の3次元弾性解析

西川 哲也*, 原 賀 康 介*

要 旨

接着接合物の応力解析に要する計算規模の低下を目的とし、境界要素法を用いた3次元弾性解析プログラムの開発を行った。このプログラムでは4角形の4頂点に節点を持つ1次要素を用いている。また積分計算は、一般の場合にはLegendre-Gaussの数値積分公式を用い最大32点積分まで行っている。特異積分や接着層部分の特異に近い積分の場合には要素をサブ要素に分割するサブエレメント法を用いている。これらの手法により、計算時間の短縮化を図っている。このプログラムにより接着ブロック、単純重ね合わせ継手、ウェルド・ボンディング継手の応力解析を行った。これらの解と、解析解または2次元境界要素法による解との比較を行った。その結果、ほぼ妥当な要素分割で十分な精度であり、境界要素法の有効性が確認できた。

1. 緒 言

接着接合は、構造部材から電子部品、光学部品などの精密微小部品まで幅広い領域で適用されており、その実績も大きい。しかし、接合部の破壊に対する安全性、信頼性に関しては溶接や、ボルト・ナットなどに比べて劣る面があり、接着接合が構造部材の多くで2次元的な接合手段として用いられている一因と思われる。接着接合部が破壊に対して信頼性が低いのは、寿命予測が困難であるほか、接着破壊に対する強度則が確立されていないためであり、この確立のためには多くの強度試験、応力解析が必要である。

接着接合系の応力解析については、接着層が薄いため、汎用的な数値解析手法である有限要素法では要素分割数が膨大となり、計算機や解析者にかかる負荷が大きくなる。そのため著者らは、接着接合系の応力解析法として要素分割の容易さから境界要素法を用いた応力解析プログラムの開発を行っている¹⁻⁴⁾。これまでに開発したプログラムは2次元弾性及び熱弾性解析用であった。しかし、接着接合物には2次元近似では現物との対応が困難なものも多い。そのため、今回新たに3次元弾性解析プログラムの開発を行った。このプログラムでは、サブエレメント法を用いて特異積分や接着層部分の特異に近い

積分の計算を行い、計算時間の短縮化を図っている。境界要素法で接着接合物の3次元応力解析を行った例は他に見当たらず、境界要素法の有効性や、どの程度の要素分割を行えばよいか、などということが未知である。このため、このプログラムにより種々の接着継手の応力解析を行いその有効性を確認した。

2. 理 論

本章では、境界要素法による3次元応力解析の理論式及び本プログラムで用いた具体的、効率的計算手法について述べる。

2.1. 境界積分方程式

3次元物体に対する、境界積分方程式は以下のように示される。

$$c \cdot u + \int_{\Omega} p^* \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} u^* \cdot p d\Omega \quad (1)$$

u : 変位 u^* : 変位の基本解 Ω : 物体表面

p : 表面力 p^* : 表面力の基本解 c : 定数

ここで、変位の基本解 u^* と表面力の基本解 p^* は次式で与えられる。

$$u^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j\} \quad (2)$$

$$p^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial n}$$

* 三菱電機(株)材料研究所

$$-(1-2\nu)(r_{,i}n_j+r_{,j}n_i) \tag{3}$$

r : ソース点と場の点との距離
 $r_{,i}$: r の i 方向微分
 r_i : ソース点と場の点との i 方向距離
 δ_{ij} : クロネッカーの δ

G : 横弾性係数
 ν : ポアソン比
 n_i : i 方向余弦
 $(i, j) = 1 \sim 3$

2.2. 内挿関数, 数値積分

物体表面を N 個に分割した場合, 式(1)は次のような離散化された式で表わされる。

$$c_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Psi]^T p^* |G| d\eta_1 d\eta_2 [u]$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Psi]^T u^* |G| d\eta_1 d\eta_2 [p] \tag{4}$$

ここで, $[\Psi]$ は内挿関数であり, (η_1, η_2) は局所座標, $|G|$ は座標変換に伴う Jacobian である。本プログラムでは四角形1次要素を用いた。四角形1次要素は Fig. 1

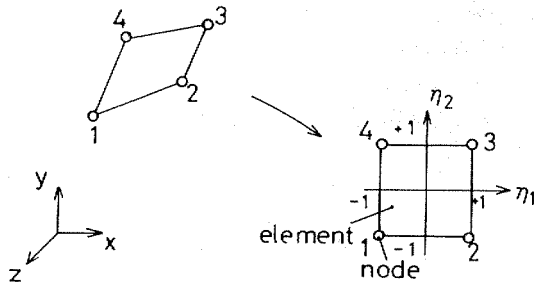


Fig. 1 The type of boundary element.

に示すように4頂点に節点を設け, 次式に示す4つの内挿関数により, 座標, 変位, 表面力の値を内挿するものである⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}(1-\eta_1)(1-\eta_2) & \psi_3 &= \frac{1}{4}(1+\eta_1)(1+\eta_2) \\ \psi_2 &= \frac{1}{4}(1+\eta_1)(1-\eta_2) & \psi_4 &= \frac{1}{4}(1-\eta_1)(1+\eta_2) \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

これらの値から座標 x , 変位 u は,

$$x = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 + \psi_4 x_4 \tag{6}$$

$$u = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3 + \psi_4 u_4 \tag{7}$$

となる。また, 法線ベクトルの成分 g_1, g_2, g_3 , 及びその絶対値 $|G|$ (Jacobian) は次のように計算できる。

$$n = \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial r}{\partial \eta_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = (g_1, g_2, g_3) \tag{8}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial y}{\partial \eta_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_2} - \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \\ g_2 &= \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x}{\partial \eta_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \\ g_3 &= \frac{\partial x}{\partial \eta_1} \frac{\partial y}{\partial \eta_2} - \frac{\partial y}{\partial \eta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$|G| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2} \tag{10}$$

これらを(4)式に代入し, 所定の境界条件のもとで連立一次方程式を構成しこれを解けば, 物体表面上の未知の変位, 表面力を得ることができる。なお, (2), (3)式の基本解の積分は, 一般の場合にはそのまま次式のような Legendre-Gauss の数値積分公式を用いて行う。

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m f(x_i, y_j) w_i w_j \tag{11}$$

また, ソース点と場の点一致した場合には, 関数の値が無限大となる特異点を含む積分となるが, この場合は1つの要素をさらに部分要素に分割するサブエレメント法を用いて行う。

Fig. 2 にサブエレメント分割による特異積分の概念図

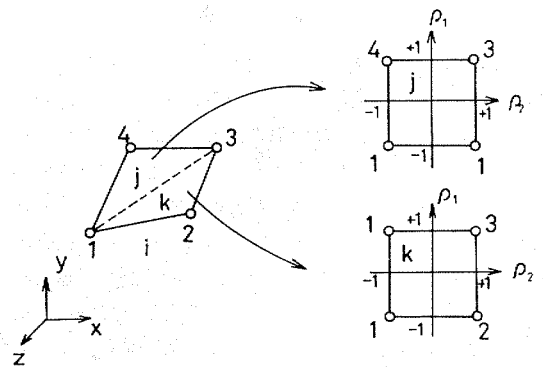


Fig. 2 Integration schemes by means of subdivision of element.

を示す⁶⁾。Fig. 2において, 全体座標系における要素 i の1番の節点の特異点であるとする。この場合は, まず要素を1番の角を分割するような2つの三角形(サブエレメント) j, k に分割する。そして, それぞれの三角形を次式に示す内挿関数により正方形の局所座標系 (ρ_1, ρ_2) に変換し, 通常の Legendre-Gauss の数値積分を行い, 2つを足し合わせる。

$$S^*_{kij} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} [3n_m r_m (1-2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki}) - 5r_i r_j r_k] + 3\nu(n_i r_j + n_j r_i) r_k + (1-2\nu)(3n_k r_i r_j + n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ki}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \quad (20)$$

である。

3. 解析例

本章では、このプログラムにより解析を行ったいくつかの例を紹介する。

3.1. 接着ブロックの単純引っ張り

まず最初に Fig. 3 に示す接着ブロックの単純引っ張り問題を解析した。それぞれの材料定数を Table 1 に示す。要素分割は Fig. 4 に示すように、1面1要素合計18要素

Table 1 Mechanical Properties.

	Young's Modulus	Poisson's Ratio
Region A	21000kg/mm ²	0.3
Region B	21000kg/mm ²	0.3
Region C	21000kg/mm ²	0.3

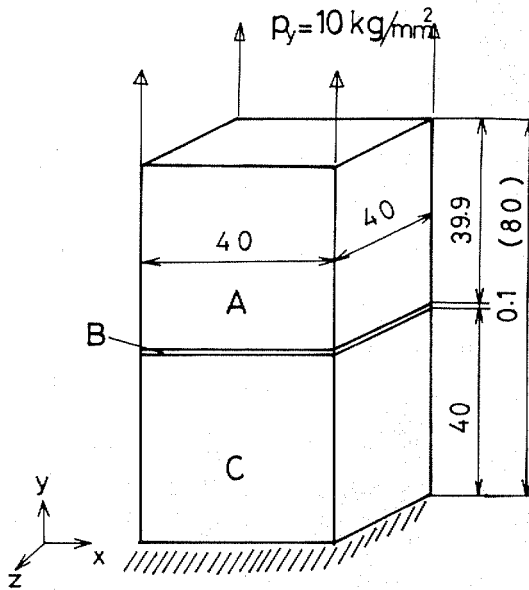


Fig. 3 Shape, dimensions and boundary conditions of the bonded block.

と極めて粗く分割した。なお、Fig. 4 は、展開図として示している。領域 A, B, C のうち B は、接着層を想定して厚さ0.1mm としているが、数値解と解析解を比較するためにヤング率、ポアソン比を A, B と同じとした。すなわち、要素分割は接着ブロックを想定している

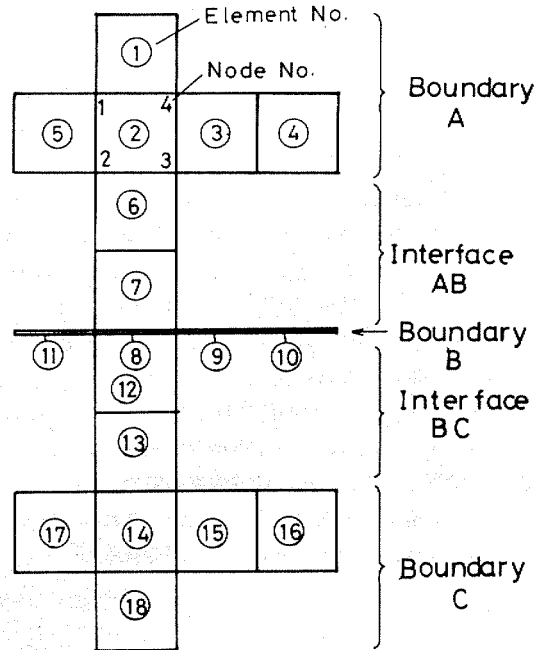


Fig. 4 Surface element arrangement for the bonded block.

が、実際には、長さ80mm の鉄の角柱の引っ張り問題となる。接着接合物の応力解析の精度は、有限要素法等の数値解析では、接着層、及びその付近の要素分割の仕方に大きく依存するため、本節では接着層を想定した要素分割で、解の精度を見た。

解析結果を Table 2 に示す。Table 2 は、接着ブロック最上面の4頂点(節点)の y 方向変位 v の解析解との誤差である。なお解析解 v_{cr} は、材料力学的に、

$$v_{cr} = \epsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{10 \times 80}{21000} = 0.0380952 \quad (21)$$

ここで、 ϵ : 歪 l : 材料の長さ

σ : 応力 E : 材料のヤング率

として求めた。Table 2 より、1面1要素の極めて粗い要素分割でも非常に精度の良い解が得られていることがわかる。また、接着ブロック最下面の y 方向表面力 p_y は、6桁まで出力したが6桁まで正解 ($p_y = 10.0000$) と一致した。

Table 2 The computed error of displacements for y-direction.

Node No.	Error (%)
1	0.0024
2	0.0024
3	0.0024
4	0.0024

3.2. 単純重ね合わせ継手の引張り剪断

次に単純重ね合わせ継手の引張り剪断の解析を行なった。解析モデルの形状、寸法、境界条件を Fig. 5に示す。また解析に用いた材料定数を Table 3に、要素分割図(展開図)を Fig. 6に示す。要素分割数は、被着体88—接着層58—被着体88の合計234要素とした。解析結果を Fig. 7~12に示す。Fig. 7, 8は、接着層上面に働く剪断応力(τ_{xy})であり、Fig. 7は τ_{xy} の2次元的な分布、Fig. 8は τ_{xy} の2次元解析との比較を示したもので、○は従来の2次元境界要素法³⁾による解、△は本プログラムの3次元解析における継手の中央部($z = 10\text{mm}$)の解であ

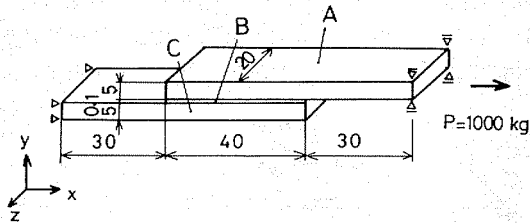


Fig. 5 Shape, dimensions and boundary conditions of the single lap joint.

Table 3 Mechanical Properties.

	Young's Modulus	Poisson's Ratio
Region A	21000kg/mm ²	0.3
Region B	300kg/mm ²	0.35
Region C	21000kg/mm ²	0.3

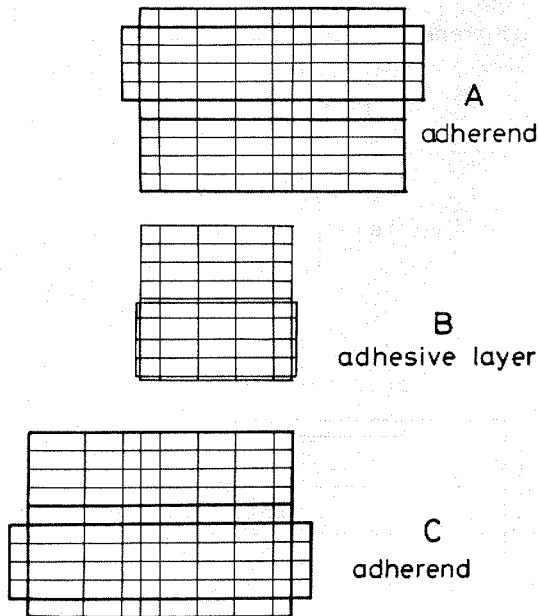


Fig. 6 Surface element arrangement for the single lap joint.

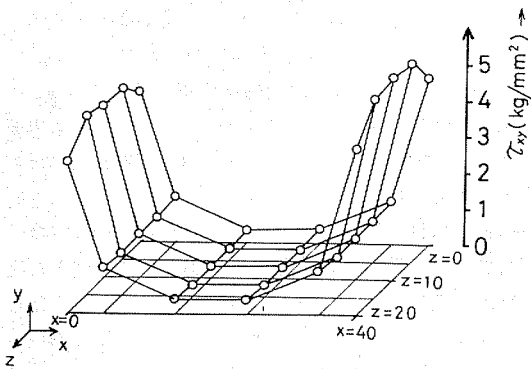


Fig. 7 Shear stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

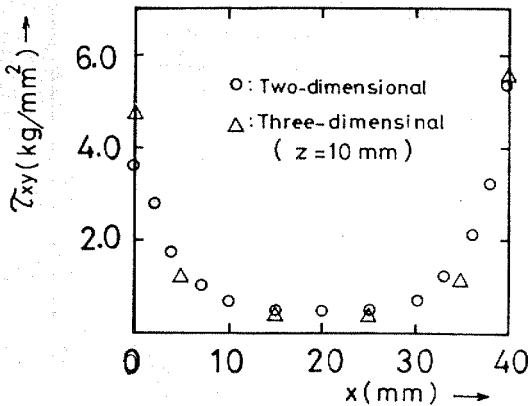


Fig. 8 Shear stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

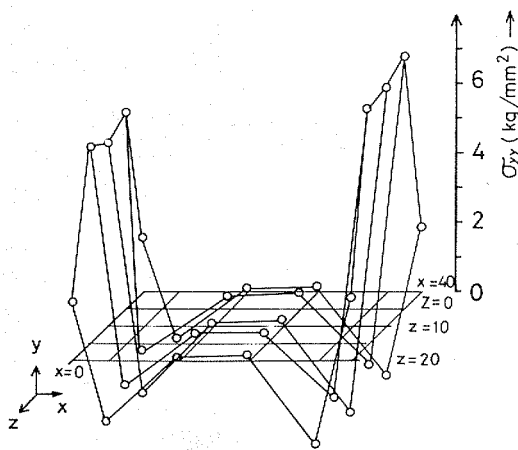


Fig. 9 Normal stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

る。この図より両者はほぼ一致していることがわかる。また、Fig. 9, 10は、接着層上面に働く垂直応力 (σ_{yy}) であり、Fig. 9は σ_{yy} の2次元的な分布、Fig. 10は σ_{yy} の2次元解析との比較を示したもので、○は2次元境界要素法による解、△は本プログラムの3次元解析における継手の中央部 ($z = 10\text{mm}$) の解である。この図からも両者の値はほぼ一致していることがわかる。Fig. 11は、接着層上面に働く剪断応力 (τ_{xz}) である。この図から接着層上面では、 $x > 20\text{mm}$ の部分で継手の中心部分 ($z = 10\text{mm}$) に向かって力を受けていて、また $x < 20\text{mm}$ ではその逆の力を受けていることがわかる。なお、参考までに変位を拡大した変形図を Fig. 12に示す。

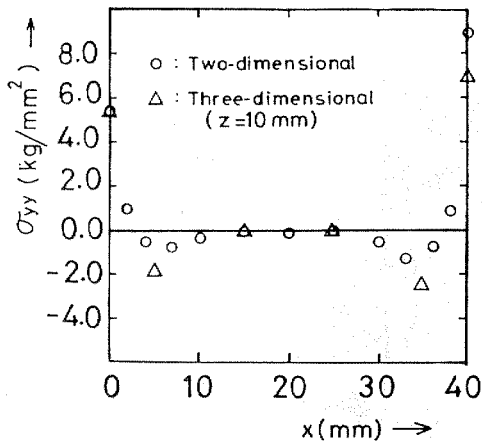


Fig. 10 Normal stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

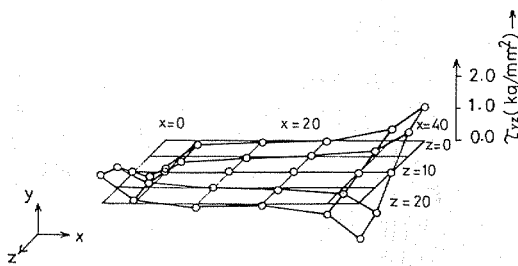


Fig. 11 Shear stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

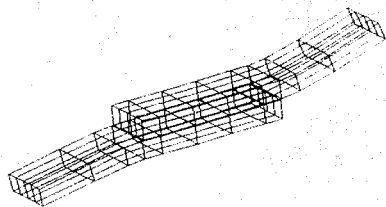


Fig. 12 Deformation of the single lap joint.

3.3. ウェルド・ボンディング継手の引張り剪断

最後にスポット溶接と接着を併用した、ウェルド・ボンディング継手の引張り剪断の解析を行った。解析モデルの形状、寸法、境界条件を Fig. 13に示す。また、解析に用いた材料定数を Table 4に、要素分割図 (展開図) を Fig. 14に示す。Fig. 14に示すようにスポット溶接部 (ナゲット) は、六角形で近似している。要素分割数は合計212要素とした。解析は、まず Fig. 14に示した程度の要素分割で妥当な解が得られるかどうかの確認として接着層のヤング率、ポアソン比を被着体の鉄と同じ、すなわち、鉄の一体物として行った。このようにすれば、継手の板幅方向の材質がすべて一様となり、従来の2次元境界要素法解析との比較が可能となる。解析結果を Fig. 15に示す。Fig. 15は接着層 (材質は鉄を仮定) 上

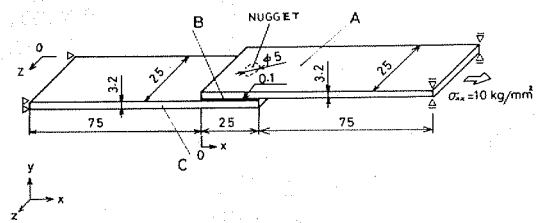


Fig. 13 Shape, dimensions and boundary conditions of the welded joint.

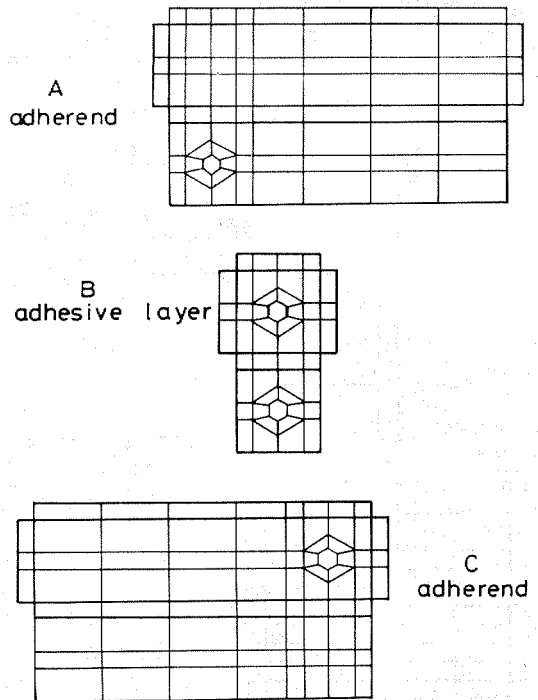


Fig. 14 Surface element arrangement of the welded joint.

Table 4 Mechanical Properties.

	Young's Modulus	Poisson's Ratio
Region A	21000kg/mm ²	0.3
Region B	21000.300kg/mm ²	0.3.0.35
Region C	21000kg/mm ²	0.3

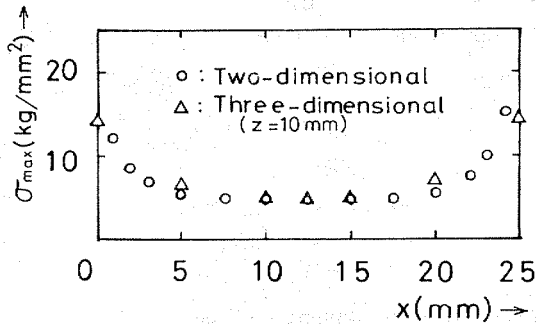


Fig. 15 Principal stress distributions in upper interface of the adhesive (steel) layer.

面に働く最大主応力分布であり、△は3次元解析における板幅のほぼ中央部 (z = 10mm) に対するもの、○は2次元解析によるものである。なお横軸は、接着層左端部を x = 0mm としている。この図より3次元解析による解は、ほぼ2次元解析のものとは一致しており、Fig. 14に示した要素分割での解の妥当性が確認できる。境界要素法における数値解析精度は、主に要素分割の仕方、要素の形に依存するため、この接着層に鉄を仮定した解析で解の妥当性が確認できれば、接着層のヤング率、ポアソン比を現実のものとおきかえた場合にも、その解の妥当性は保証されるものと思われる。

次に接着剤のヤング率を 300kg/mm²、ポアソン比を 0.35 として、本来のウェルド・ボンディング継手の解析を行った。解析結果を Fig. 16~18に示す。Fig. 16は、上被着体上面に働く最大主応力 (σ_{max}) 分布である。σ_{max} は、荷重端から接着部まで一様な値で、接着部ではほぼ単調に減少していき、スポット溶接近傍での応力集中はほとんど生じていないことがわかる。また Fig. 17は、接着層上面に働く最大剪断応力 (τ_{max}) 分布であり、Fig. 18は継手の変形 (拡大) 図である。

4. 結 言

本研究では、接着接合物の応力解析に要する計算規模の低下を目的とし、境界要素法を用いた3次元弾性解析プログラムの開発を行った。このプログラムでは、要素は1次要素を用いている。また数値積分は、一般の場合には Legendre-Gauss の数値積分公式、特異積分や接着

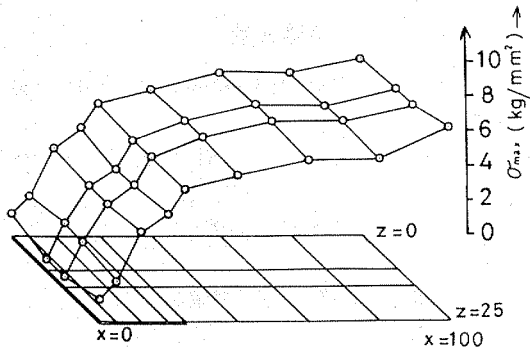


Fig. 16 Principal stress distribution in upper side of adherend A.

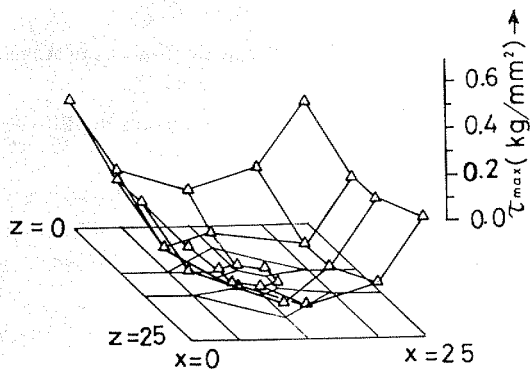


Fig. 17 Maximum shear stress distribution in upper interface of the adhesive layer.

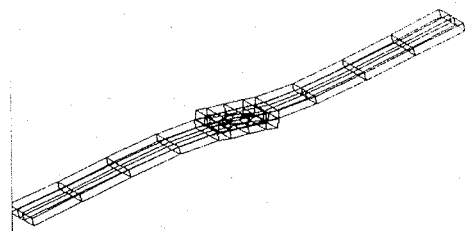


Fig. 18 Deformation of the weldbonded joint.

層部分の特異に近い場合には、サブエレメント法を用いて計算時間の短縮化を図っている。このプログラムにより接着ブロック、単純重ね合わせ継手、ウェルド・ボンディング継手の応力解析を行った。その結果、解析解や従来の2次元境界要素法による解との比較により、ほぼ妥当な要素分割で十分な精度が得られることがわかり境界要素法の有効性が確認できた。

本研究は、昭和63年6月23日第26回接着研究発表会において、講演発表したものである。

参考文献

- 1) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 21(4), 136 (1985).
- 2) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 22(5), 244 (1986).
- 3) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 22(8), 409 (1986).
- 4) 西川哲也, 原賀康介, 日本接着協会誌, 23(12), 459(1987).
- 5) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel (田中正隆 訳), “境界要素解析——理論と応用”, 丸善, 131 (1984).
- 6) J.C. Lachat, J.O. Watson, *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, 10, 991-1005(1976).
- 7) C.A. Brebbia(田中正隆訳), “境界要素法の応用”, 企画センター, 129(1983).
- 8) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel(田中正隆 訳), “境界要素解析——理論と応用”, 丸善, 193 (1984).

Three-Dimensional Elastic Analysis of Adhesive Bonded Joints by Boundary Element Method

Tetsuya NISHIKAWA and Kousuke HARAGA

Materials and Electronic Devices Laboratory,
MITSUBISHI Electric Corp.

(1-1, Tsukaguchi-Honmachi, 8-chome, Amagasaki, Hyogo, 661 JAPAN)

Abstract

The computer program for three-dimensional analysis of adhesive bonded joint by boundary element method has been prepared. The scale of numerical analyses is reduced by this program. In this program, a liner element which has four nodes at each apex is used. Generally numerical integration is evaluated within 32 integral degrees of Legendre-Gauss Formula. The integral scheme by means of subdivision element is adapted in case of the evaluations of singular integral or nearly singular integral in which concerns adhesive layer. By these methods, the computer C.P.U. time is reduced.

Three-dimensional stress-strain analyses of bonded block, single lap joint, and weldbonded joint by this program were computed. The results were compared with analytic solution or Two-dimensional analyses by Boundary Element Method. It is found that satisfactory numerical accuracy was acquired by large surface element division and application of Boundary Element Method to adhesive bonded joint is simple and useful.

(Received : December 26, 1988)